THESE

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

par

Jacques LE GRAND

ESTIMATION DES DEBITS DE DOSE ABSORBEE PAR LES TISSUS ENDOSTEAUX ET LA MOELLE OSSEUSE DE VERTEBRES, CONTAMINEES PAR UN ELEMENT OSTEOTROPE EMETTEUR BETA MOINS

Soutenue le 28 juin 1972 devant la Commission d'Examen

MM.	D. DUGUE	Président
	G. MORLAT	Examinateurs
	M. DUQUESNE	

THESE

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

par

Jacques LE GRAND

ESTIMATION DES DEBITS DE DOSE ABSORBEE PAR LES TISSUS ENDOSTEAUX ET LA MOELLE OSSEUSE DE VERTEBRES, CONTAMINEES PAR UN ELEMENT OSTEOTROPE EMETTEUR BETA MOINS

Soutenue le 28 juin 1972 devant la Commission d'Examen

MM.	D. DUGUE	Président
	G. MORLAT	Examinateurs
	M. DUQUESNE	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je remercie ici tous ceux qui,
par la communication de données,
par leurs conseils, par leur aide,
ont permis la réalisation de ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547611_0125

P L A N

1 - INTRODUCTION

1 - 1 Description de l'os spongieux

1 - 2 Contamination de l'os

1 - 3 Sites biologiques radiosensibles.

1 - 4 Le rayonnement et son comportement dans le milieu.

1 - 5 Position du problème

1 - 6 Les différentes étapes du travail.

2 - DONNEES PHYSIQUES

2 - 1 Notions générales

2 - 1.1 Notions de parcours

2 - 1.2 Pouvoir d'arrêt et transfert linéique d'énergie

2 - 1.3 Energie communiquée et dose absorbée

2 - 2 Energie communiquée localement en fonction de l'éloignement de la source

2 - 3 Applications au milieu osseux

2 - 3.1 Milieu équivalent tissu mou

2 - 3.2 Influence du numéro atomique moyen du milieu.

2 - 4 Le strontium-90

2 - 5 Les données physiques utilisées.

3 - DESCRIPTION DU MILIEU OSSEUX

3 - 1 Protocole expérimental

3 - 1.1 Echantillonnage

3 - 1.2 Mesures

3 - 1.3 Lecture des enregistrements

3 - 1.4 Résultats expérimentaux

3 - 2 Hypothèses expérimentales : les variables aléatoires considérées.

3 - 2.1 Hypothèses d'homogénéité

3 - 2.2 Les variables aléatoires considérées.

3 - 3 Les données

3 - 3.1 Les travées osseuses

3 - 3.2 Les espaces médullaires

3 - 3.3 Evolution avec l'âge de l'ensemble des données d'un individu

3 - 3.4 Moyennes et écart-types des longueurs de cordes de travées osseuses et d'espaces médullaires.

3 - 3.5 Test du χ^2 sur les histogrammes des fréquences de longueurs de corde de travées osseuses.

3 - 4 Bilan et conclusion.

4 - ANALYSE DES DONNEES SUR HISTOGRAMME

4 - 1 Rappel théorique

4 -1.1 Schéma de dualité

4 -1.2 Analyse en composantes principales

4 -1.3 Analyse canonique classique

4 -1.4 Analyse factorielle de correspondance.

4 - 2 Applications

4 -2.1 Analyse en composantes principales.

4 -2.2 Analyse factorielle des correspondances.

4 -2.3 Comparaison des résultats obtenus.

4 - 3 Conclusion

5 - RECHERCHE D'UN MODELE PROBABILISTE

5 - 1 Introduction

5 - 2 Première partie

5 -2.1 Introduction

5 -2.2 Principe général

5 -2.3 La méthode en détail.

5 -2.4 Déformation de la loi de tirages

5 - 3 Distribution théorique associée aux longueurs de corde d'espaces médullaires - Estimation des paramètres.

5 -3.1 Le modèle

5 -3.2 Ajustement du modèle aux données expérimentales

5 - 4 Conclusion.

6 - ESTIMATION DES DEBITS DE DOSE ABSORBEE PAR LES TISSUS RADIOSENSIBLES DE LA VERTEBRE.

6 - 1 Electrons monocinétiques.

6 -1.1 Principe général.

6 -1.2 Probabilité pour qu'un point sigué à la distance Z d'un point cible soit dans une travée osseuse.

6 - 2 Spectre d'énergie

6 - 3 Les résultats.

6 -3.1 Les fonctions $h_p(Z)$ et $h(Z)$

6 -3.2 Les fonctions $W_1(y^9)$ et $W_2(L)$

6 -3.3 Débits de dose absorbée en fonction de l'âge des individus et de l'énergie des électrons.

6 -3.4 Résultats pour les spectres d'énergie du strontium-90, de l'yttrium-90 et du mélange des deux spectres.

6 -3.5 Dispersion dans une classe d'âge.

6 - 4 Comparaison avec les résultats de WHITWELL.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'élaboration d'une méthode d'estimation des doses absorbées, au niveau des sites biologiques radiosensibles de l'os spongieux, dans le cas d'une contamination de l'homme par un radioélément émetteur bêta moins.

En particulier on estimera les débits de dose absorbée par les tissus occupant les espaces médullaires de vertèbres contaminées par du strontium-90. Ce radioélément, à vie radioactive longue, se trouve dans la biosphère, et atteint l'homme. Il est donc utile de pouvoir évaluer le risque que sa présence dans l'organisme entraîne, tant du point de vue de l'individu que de la population. De plus, il est nécessaire de connaître l'évolution de ce risque avec l'âge de l'individu afin de connaître l'époque de la vie où l'homme est le plus vulnérable.

1 - 1 DESCRIPTION DE L'OS SPONGIEUX (11, 31, 36)

Le squelette se compose d'os longs, d'os courts et d'os plats. Chacun d'entre eux est formé de trois parties :

- l'os compact
- l'os spongieux
- les cartilages.

On s'intéresse plus spécialement à l'os spongieux. Il se trouve dans les épiphyses des os longs. Dans la vertèbre, il occupe toute la partie centrale; il est entouré d'une fine couche d'os compact (Figure 1 - 1).

L'os spongieux se compose de lamelles osseuses enchevêtrées, les travées, qui délimitent entre elles les espaces médullaires.

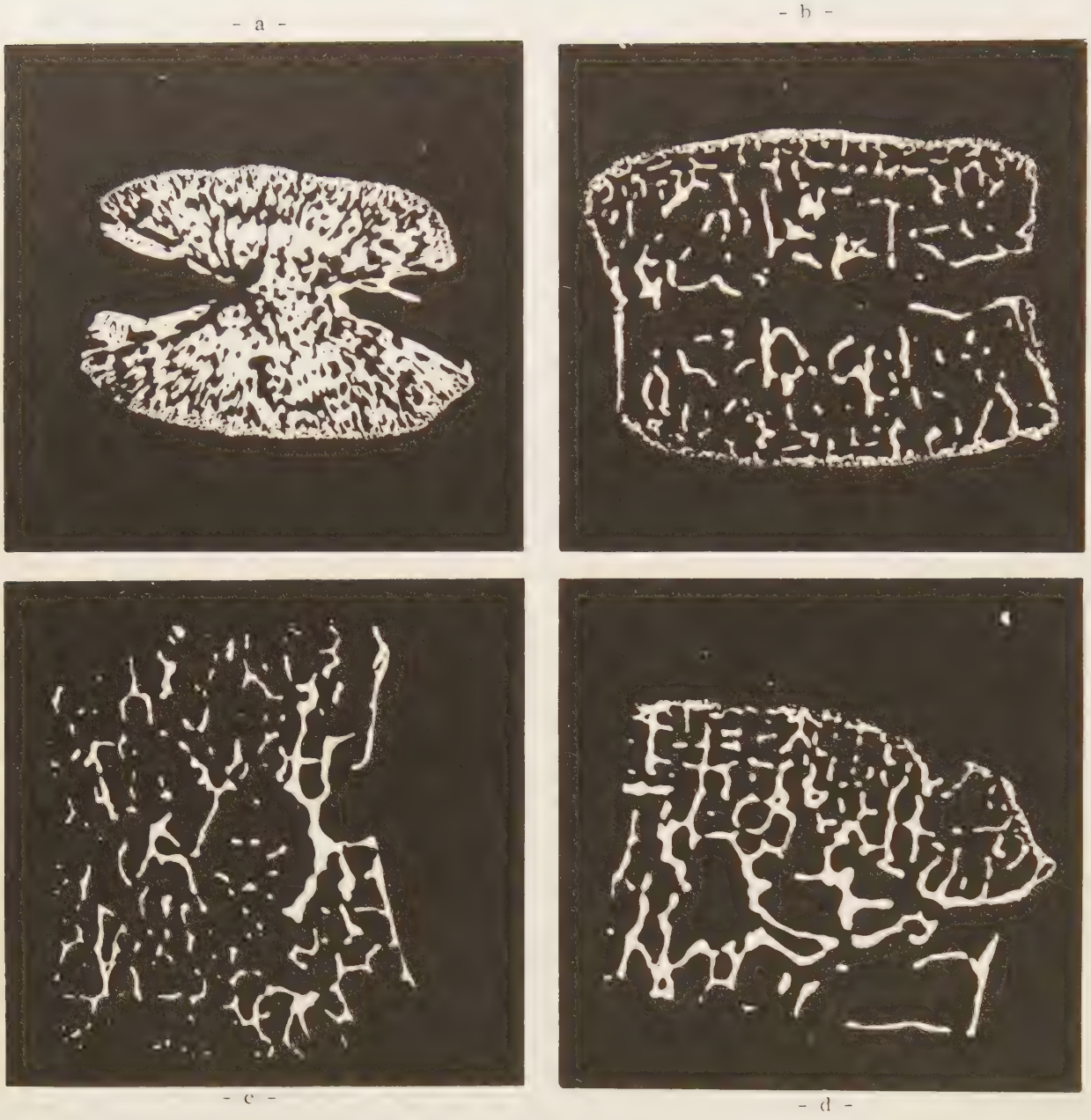


Figure.1_1 : Agrandissements des microradiographies de coupes sagitales de la vertèbre cervicale d'enfants âgés de : a) 2 jours, b) 5 mois, c) 2 ans et demi, d) 8 ans.

Les travées osseuses constituent la partie minérale de l'os spongieux et se composent de cristaux de calcium hydroxyapatite, de fibres collagènes et de substance fondamentale. La taille et l'espacement de ces cristaux sont de l'ordre de 100 angströms (11 ,31).

Les espaces médullaires contiennent de la moelle osseuse rouge qui a une fonction physiologique importante : la fabrication de globules rouges. Au contact des travées osseuses, dans les espaces médullaires se trouvent les tissus endostéaux. Ils sont composés d'amas de cellules, d'épaisseur 5 à 10 microns : les ostéoblastes et les ostéoclastes.

Les ostéoblastes détruisent l'os minéral et les ostéoclastes le reconstruisent. L'ensemble de ces groupes de cellules, répartis au hasard sur les parois des travées osseuses, assure la régénération de l'os.

1 - 2 CONTAMINATION DE L'OS

Les éléments ostéotropes que l'on considère en radioprotection se fixent dans la partie minérale de l'os. Les échanges entre les tissus mous et la partie minérale de l'os sont lents par rapport aux échanges entre tissus mous ; la contamination des travées osseuses conduit donc à une exposition plus longue que celle des tissus mous de l'os spongieux.

La contamination de l'os par un radioélément ostéotrope provoque le remplacement d'un certain nombre d'atomes de calcium par des atomes de ce radioélément, dans les cristaux de calcium hydroxyapatite.

Le métabolisme de tels éléments ostéotropes est analogue à celui du calcium.

La théorie des compartiments (27) permet d'expliquer d'une manière généralement satisfaisante les cycles métaboliques, et de prévoir la quantité du radioélément fixée dans l'os minéral. Mais ceci n'est connu qu'au niveau du squelette entier et ne permet de définir localement qu'une contamination moyenne.

La fixation de radioélément dans les travées osseuses s'effectue sous l'action des tissus endostéaux qui régénèrent l'os minéral ; la contamination commence donc près des parois et gagne ensuite le centre des travées osseuses. Il peut donc exister dans l'épaisseur de la travée osseuse un gradient de contamination. Mais l'action contraire des colonies d'ostéoblastes et d'ostéoclastes, leurs localisations, leurs déplacements, leurs activités peuvent modifier ce schéma.

En l'absence de données précises sur ce point, on supposera que les travées osseuses sont contaminées uniformément.

1 - 3 SITES BIOLOGIQUES RADIOSENSIBLES

Les fonctions physiologiques les plus importantes dans l'os, sont remplies :

- par la moelle osseuse rouge contenue dans les espaces médullaires : fabrication de globules rouges ;

- par les tissus endostéaux situés au contact des travées osseuses sur une épaisseur de 10 microns environ : régénération de l'os.

Les effets biologiques les plus importants observés après irradiation de ces sites sont :

- l'apparition de leucémie pour la moelle osseuse ;
- l'apparition de tumeurs osseuses pour les tissus endostéaux.

Les sites radiosensibles dans l'os spongieux sont donc :

- la totalité du volume occupé par les espaces médullaires de l'os;

- la couche de tissu, d'épaisseur 10 microns environ, se trouvant au contact des travées osseuses dans l'os spongieux.

1 - 4 LE RAYONNEMENT ET SON COMPORTEMENT DANS LE MILIEU

On considérera uniquement les radioéléments ostéotropes émetteurs bêta.

La désintégration radioactive d'un atome de ces éléments se traduit par l'émission d'un électron. L'énergie cinétique d'émission de cet électron est une variable aléatoire. Le spectre d'énergie, densité de probabilité de l'énergie cinétique d'émission est caractérisé par sa forme et l'énergie maximale. Il dépend des propriétés physiques du noyau de l'atome du radioélément considéré.

L'électron émis dans les travées perd son énergie cinétique le long de la trajectoire qu'il décrit dans l'os. Lorsque son énergie cinétique est assez grande, il peut traverser plusieurs espaces médullaires et plusieurs travées osseuses.

Les tissus mous de l'os spongieux contenus dans les espaces médullaires ont une composition proche de celle des autres tissus mous de l'organisme humain. Ils contiennent un grand pourcentage d'eau (environ 80 %), et par conséquent le comportement des électrons dans les tissus mous et dans l'eau sera à peu près le même.

La présence des éléments minéraux dans les travées osseuses les rendent plus denses que les tissus mous. Le comportement des électrons y sera donc différent.

Le comportement des électrons dans un milieu homogène, composé d'un seul élément, dépend du numéro atomique, c'est-à-dire du nombre de charges électriques du noyau d'un atome de cet élément. Si le milieu se compose d'un mélange d'éléments on définit un nombre de charges moyen pour le milieu en pondérant le numéro atomique de chaque élément, par la composition pondérale du milieu.

Dans les tissus mous et l'os, il y a surtout des éléments légers dont les noyaux comportent à peu près autant de protons (particules chargées) que de neutrons (particules neutres). Le rapport des nombres de charges moyens des milieux est donc peu différent de celui des nombres de masses (nombre de particules du noyau).

La différence de comportement des électrons dans l'os et les tissus mous peut s'exprimer en fonction du rapport des masses volumiques du milieu.

1 - 5 POSITION DU PROBLEME

Dans l'os spongieux, le milieu source, émetteur d'électrons est constitué de l'ensemble des travées osseuses et le milieu cible est soit l'ensemble des tissus occupant les espaces médullaires, soit les tissus endostéaux.

Les problèmes posés concernent donc :

- la "structure géométrique" de l'os spongieux, c'est-à-dire des domaines occupés par ces deux milieux, de leur situation respective et de leurs modifications en fonction de l'âge de l'individu ;

- le comportement des électrons dans ces deux milieux ;

- l'évaluation en fonction d'un seul paramètre (la distance séparant un point source dans une travée osseuse d'un point cible dans un espace médullaire)de la probabilité pour qu'un électron issu du point source arrive au point cible.

1 - 6 LES DIFFERENTES ETAPES DU TRAVAIL

On n'abordera pas ici les problèmes que posent le métabolisme des ostéotropes et leur fixation dans l'os. On suppose que les travées osseuses sont contaminées uniformément.

On présente d'abord les grandeurs et les données physiques utilisées et les hypothèses simplificatrices qu'il a été nécessaire d'adopter. Ensuite, on étudie la structure géométrique de l'os spongieux à l'aide des données fournies par WITMER (36). Celles-ci se composent d'histogrammes des fréquences de longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires pour un échantillon d'individus.

La comparaison des caractéristiques de valeurs centrales et de dispersion associée aux histogrammes (en particulier moyenne et écart-type) ne suffit pas pour expliquer la déformation des histogrammes au cours de l'âge.

- d'une part, sans hypothèse a priori, en utilisant l'analyse en composantes principales et l'analyse factorielle des correspondances ;

- d'autre part, en recherchant un modèle stochastique compatible avec les données.

L'ajustement du modèle anx données expérimentales est effectué à l'aide d'une méthode de tirage au hasard (2).

Enfin, l'estimation des doses absorbées, au niveau de la moelle osseuse et des tissus endostéaux de la vertèbre est effectuée en simulant le milieu osseux, autour d'un point cible.

Les doses absorbées sont estimées d'abord pour des électrons monocinétiques et ensuite pour les spectres d'énergie du strontium-90, de l'yttrium-90 et du mélange strontium-90 et yttrium-90 à l'équilibre radioactif.

C H A P I T R E II

DONNEES PHYSIQUES

2 - 1 NOTIONS GENERALES

2 - 1-1 Notions de parcours

Une particule chargée a deux types d'interaction avec le milieu dans lequel elle se déplace :

- interaction avec un noyau ;
- interaction avec les électrons d'un atome.

Entre deux interactions, elle parcourt en ligne droite une distance dont la longueur est une variable aléatoire.

Pour un électron chaque interaction se traduit par une déviation de trajectoire qui est une variable aléatoire. La trajectoire de l'électron dans le milieu est une ligne brisée. Les particules lourdes subissant peu ou pas de déviation de trajectoire, celle-ci est rectiligne.

Considérons un flux de particules monodirectionnel et monocinétique, pénétrant dans un écran. On appelle transmission T, à une profondeur donnée, le rapport du flux de particules à cette profondeur au flux de particules incidentes.: c'est la probabilité pour une particule d'atteindre cette profondeur.

La transmission permet de définir plusieurs notions de parcours d'une particule (Figure 2-1) (12, 21) :

- le parcours projeté $\overline{R}$ est l'épaisseur moyenne traversée par un flux de particules monoénergétiques ;

- le parcours projeté médian R_m est l'épaisseur traversée par la moitié du flux initial ;

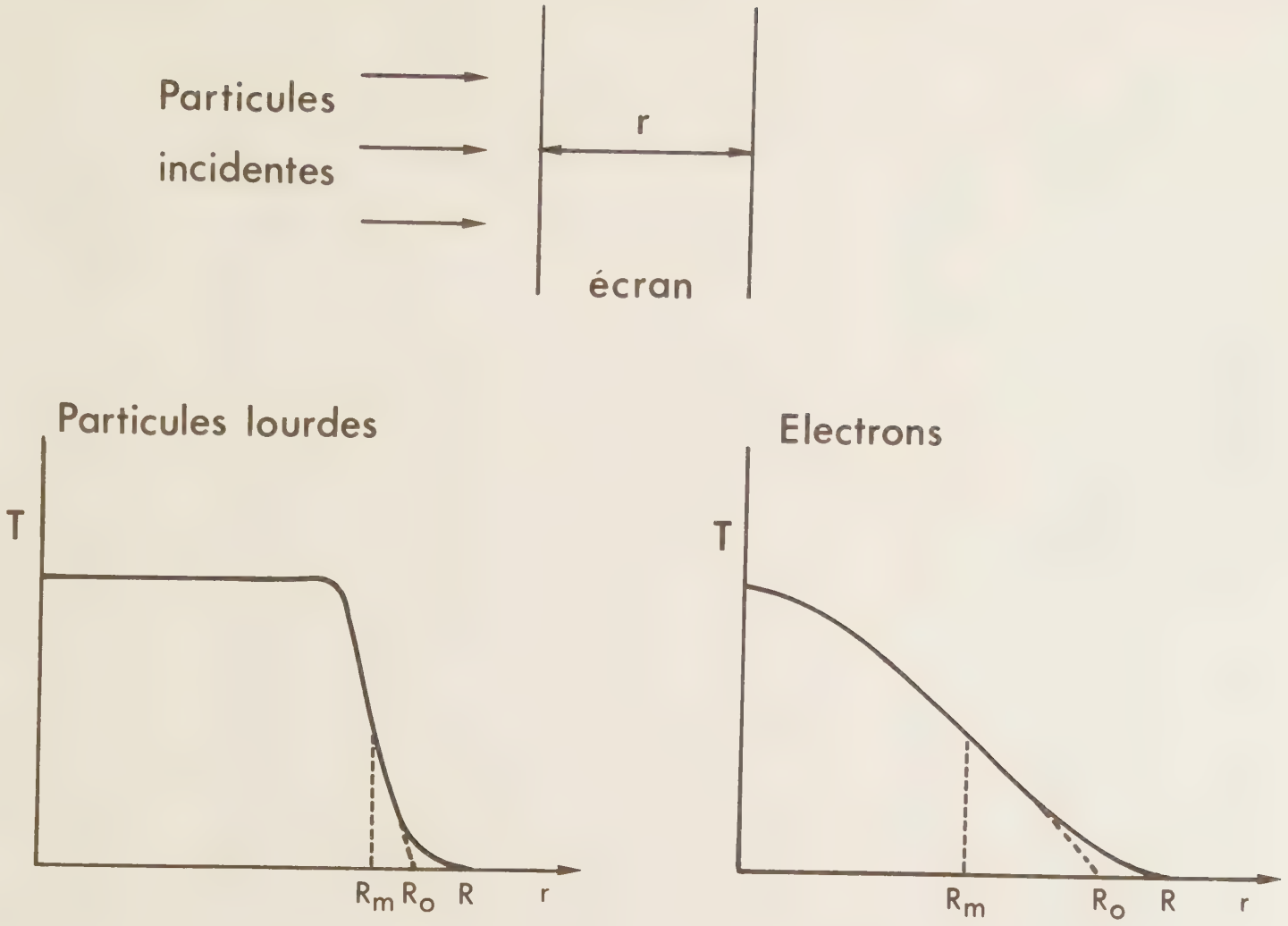


Figure. 2-1. Transmission de particules

- le parcours extrapolé R_o est l'épaisseur obtenue en extrapolant linéairement la partie rectiligne de la courbe représentant la transmission ;

- le parcours maximum R est l'épaisseur maximale traversée.

Ces notions de parcours sont proches les unes des autres pour les particules lourdes. Par contre, pour des électrons, les déviations de trajectoires sont très nombreuses et les valeurs des différentes notions de parcours peuvent être très différentes.

Si la longueur de la trajectoire est pratiquement égale au parcours maximal pour des particules lourdes, pour des électrons elle est différente.

Les pertes d'énergie subies par les particules au cours des interactions avec le milieu sont des variables aléatoires, la longueur de la trajectoire qui dépend de la nature de la particule, de son énergie intiale, des pertes d'énergie lors des interactions est aussi une variable aléatoire. On ignore généralement les lois de probabilités de ces variables aléatoires. Aussi fait-on l'hypothèse de ralentissement continu pour déterminer la longueur de trajectoire moyenne d'un électron d'énergie initiale E_o (4).

On suppose que l'électron perd, le long de sa trajectoire, son énergie cinétique d'une manière continue ; à chaque point de sa trajectoire est alors associée une énergie cinétique E.

La longueur de trajectoire et la perte d'énergie par unité de longueur de trajectoire sont alors des fonctions déterministes de l'énergie E.

Soit $\frac{dE}{dr}$ la valeur moyenne, pour un électron d'énergie E_o, de la perte d'énergie par unité de longueur de trajectoire; la valeur moyenne de la longueur de trajectoire d'un électron d'énergie E_o s'exprime alors par :

$$r_o = \int_{E=0}^{E=E_o} \left[\frac{dE}{dr}\ (E)\right]^{-1} dE$$

r_o est le parcours résiduel de l'électron dans l'hypothèse du ralentissement continu (4 , 12).

2 - 1-2 Pouvoir d'arrêt et transfert linéique d'énergie

Le pouvoir d'arrêt est la perte d'énergie moyenne par unité de parcours, d'une particule d'énergie donnée, dans un milieu donné (17,18,19).

Le transfert linéique d'énergie est l'énergie moyenne absorbée localement par unité de parcours, par une particule d'énergie donnée, dans un milieu donné (17, 18, 19).

La notion d'énergie "absorbée localement" implique la définition :

- soit d'une distance maximale de la trajectoire au-delà de laquelle l'énergie cédée au milieu n'est plus prise en compte ;

- soit d'une valeur maximale de la perte d'énergie de la particule, au-delà de laquelle la perte d'énergie ne peut plus être considérée comme locale.

Pour un électron, le rayonnement de freinage(photons émis lors du passage de l'électron près d'un noyau) cède la plus grande partie de son énergie loin de la trajectoire de l'électron. Aussi, l'énergie du rayonnement n'est-elle pas prise en compte dans le transfert linéique d'énergie.

A part le rayonnement de freinage, seuls certains rayons δ , électrons secondaires émis au cours de certaines interactions, peuvent avoir une énergie cinétique suffisante pour céder une partie de leur énergie assez loin du point d'interaction. Mais leur importance est assez faible (22).

Enfin, dans la gamme d'énergie que l'on considère (moins de 2 MeV) le rayonnement de freinage est peu important (moins de 2 % du pouvoir d'arrêt total), aussi le pouvoir d'arrêt et le transfert linéique d'énergie sont-ils pratiquement égaux. On peut donc supposer que toute l'énergie perdue par l'électron est absorbée localement.

Le pouvoir d'arrêt et le transfert linéique d'énergie s'expriment en $MeV.cm^{-1}$ ou en $MeV.cm^{2}g^{-1}$.

2 - 1-3 Energie communiquée et dose absorbée

Soit un volume ΔV de matière de masse Δm.

L'énergie communiquée E_D au volume ΔV par des rayonnements ionisants est :

$$E_D = \Sigma E_e - \Sigma E_s + \Sigma Q$$

où :

ΣE_e est la somme des énergies de toutes les particules qui entrent dans ΔV

ΣE_s est la somme des énergies de toutes les particules qui sortent de ΔV

ΣQ est l'énergie équivalente à toute variation de masse au repos qui a pu se produire dans ΔV, au cours de réactions nucléaires ou de réactions entre particules élémentaires (10).

La dose absorbée est le quotient de l'énergie communiquée par unité de masse de matière (10,17)

$$D = \frac{\Delta E_D}{\Delta m}$$

L'énergie communiquée s'exprime en joules. Pour la dose absorbée on utilise une unité spéciale le rad.

1 rad : 0,01 J/kg = 100 erg/g.

Le débit de dose absorbée est le quotient de ΔD, accroissement de la dose pendant le temps Δt, par le temps Δt

$$d = \frac{\Delta D}{\Delta t}$$

2 - 2 ENERGIE COMMUNIQUEE LOCALEMENT EN FONCTION DE L'ELOIGNEMENT DE LA SOURCE

Soient :

- une source ponctuelle isotropique d'électrons d'énergie

cinétique E_o, située au point Q;

- un point cible P, dont la distance au point Q est z.

On fait l'hypothèse du ralentissement continu des électrons. Le parcours résiduel d'un électron d'énergie cinétique E est alors :

$$r = \int_0^E \left[\frac{dE}{dr}(E)\right]^{-1} dE$$

avec :

$$0 < E < E_o$$

et $0 < r < r_o$

Considérons un électron émis en Q et passant en P; son énergie cinétique, lorsqu'il passe en P, est E, son parcours résiduel est r.

L'hypothèse de ralentissement continu entraîne que :

- la longueur de trajectoire de chaque électron émis en Q est r_o ;

- r_o est l'épaisseur maximale que peut traverser chaque électron.

Aussi est-il commode d'exprimer la distance séparant Q et P par

$$x = \frac{z}{r_o}$$

et le parcours résiduel d'un électron passant en P, avec l'énergie cinétique E, par :

$$y = \frac{r}{r_o}$$

Considérons les électrons émis en Q qui traversent la surface d'une sphère de rayon y centrée au point Q.

SPENCER a calculé le rapport (28,29) :

$$J(x) = \frac{I(z)\,dz}{\frac{dE}{dr}(E_o)}$$

où :

- E_o est l'énergie initiale des électrons ;
- z est la distance de la source ;

- x est la distance de la source exprimée en unité de parcours résiduel des électrons d'énergie E_o ;

- $\frac{dE}{dr}(E_o)$ est le pouvoir d'arrêt des électrons d'énergie E_o ;

- I (z) dz est l'énergie moyenne communiquée au volume compris entre les sphères de rayons z et z + dz par électron d'énergie E_o émis par une source ponctuelle isotropique située au centre des sphères.

Les résultats sont donnés en fonction de l'éloignement x pour des milieux de numéros atomiques Z différents et pour différentes énergies initiales E_o d'électron.

L'énergie moyenne communiquée au volume (dz $d\sigma$) entourant le point cible P, situé à la distance z de la source ponctuelle, par électron d'énergie E_o émis est :

$$W(z) = \frac{dE}{dr}(E_o) \quad \frac{J\left(\frac{z}{r_o}\right)}{4\pi z^2} \; dz \; d\sigma$$

Les valeurs de la fonction J(x) ont été calculées par SPENCER (28) et PATAU et altri (26) pour une source plane.

La comparaison entre les résultats obtenus par les méthodes de calcul et des résultats expérimentaux a été effectuée par PATAU et altri (26). Les résultats obtenus par le calcul sont généralement peu différents ; par contre, les résultats expérimentaux sont plus dispersés et s'écartent parfois fortement de ceux prévus par le calcul.

2 - 3 APPLICATION AU MILIEU OSSEUX

2 - 3-1 Milieu équivalent-tissu mou

Un os spongieux, tel que la vertèbre, est constitué de deux milieux très imbriqués l'un dans l'autre :

- les travées osseuses ;
- les espaces médullaires.

Les travées osseuses sont formées de cristaux dont les dimensions sont de l'ordre de 100 A. Les espaces médullaires contiennent la moelle osseuse dont les cellules sont de l'ordre du micron (31).
La moelle osseuse est un tissu mou.

Dans la gamme d'énergie qui nous intéresse, ($E \leq 2$ MeV), les parcours des électrons seront de l'ordre d'une dizaine de microns à 10^4 microns. Chacun des milieux, travées osseuses et moelle osseuse, peut être considéré comme homogène vis-à-vis des électrons. On appelle milieu équivalent-tissu mou, un milieu dans lequel les électrons ont un comportement proche de celui qu'ils auraient dans du tissu mou, c'est-à-dire que leur parcours et leurs pouvoirs d'arrêt, dans le milieu et le tissu mou, sont pratiquement les mêmes.

Si l'on suppose que les pouvoirs d'arrêt dans les tissus mous et le milieu équivalent-tissu associé aux travées osseuses sont égaux, les parcours, ou longueurs de trajectoire, doivent vérifier :

$$\frac{R_{\text{tissu mou (cm)}}}{R_{\text{os}} \quad \text{(cm)}} = \frac{r_{\text{tissu mou}}}{r_{\text{os}}} \frac{(\text{g/cm}^2)}{(\text{g/cm}^2)} \times \frac{\text{os}}{\text{tissu mou}} \frac{(\text{g/cm}^3)}{(\text{g/cm}^3)}$$

avec :

$$r_{\text{tissu mou}} = \int_0^E \frac{dE}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{tissu mou}}}.$$

$$r_{\text{os}} = \int_0^E \frac{dE}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{os}}}$$

Si : $\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{tissu mou}} = K \left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{os}}$ K constante.

Alors :

$$\frac{r_{\text{os}}}{r_{\text{tissu mou}}} = K.$$

On pourra remplacer l'os minéral des travées osseuses par un milieu équivalent-tissu mou si :

$$\frac{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{tissu mou}}}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{os}}} \simeq \frac{r_{\text{os}}}{r_{\text{tissu mou}}} = \text{constante}.$$

En utilisant les valeurs du pouvoir d'arrêt et du parcours résiduel d'électron dans la gamme d'énergie de 0,01 à 3 MeV données par BERGER et SELTZER (4), on obtient une valeur moyenne du rapport : 1,0721. Les valeurs maximales et minimales sont respectivement 1,091 et 1,071.

La valeur moyenne de 1,072 peut être retenue, d'autant plus que un écart de 0,3 % autour de cette valeur couvre la gamme d'énergie 0,075 MeV à 3 MeV.

La transformation des parcours dans les travées osseuses ou parcours équivalent-tissu mou est obtenue, à l'aide de la relation :

$$R_{\text{équ. tissu mou}} = \frac{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{os}}{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{\text{tissu mou}}} \times \frac{\rho_{os}}{\rho_{\text{tissu mou}}} \times R_{os}$$

avec :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{dE}{dr}\right)_{os}}{\left(\frac{dF}{dr}\right)_{\text{tissu mou}}} = 0,93$$

$$\delta = \frac{\rho_{os}}{\rho_{\text{tissu mou}}} = 1,9$$

- ρ_{os} masse volumique de l'os (1,9 g/cm3) ;
- ρ_T masse volumique des tissus mous (1 g/cm3).

La distance séparant deux points quelconques d'une vertèbre se décomposera en :

$$x = x_{os} + x_{\text{tissu mou}}.$$

Soit un équivalent tissu mou :

$$X = X_{os} + X_{\text{tissu mou}}$$

avec $X_{os} = \alpha \delta x_{os}$ et $X_{\text{tissu mou}} = x_{\text{tissu mou}}$.

REMARQUE :

Les électrons, dans la gamme d'énergie considérée (0,05 MeV à 2 MeV) traversent plusieurs travées osseuses et plusieurs espaces médullaires. La transformation de l'os spongieux en milieu équivalent-tissu mou, c'est-à-dire en un milieu homogène vis-à-vis des électrons, ne tient pas compte de l'existence de multiples interfaces entre travées et espaces.

2 - 3-2 Influence du numéro atomique du milieu

Le comportement des électrons dansun milieu dépend du numéro atomique Z des atomes composant ce milieu.

Pour un mélange d'atomes tel que les tissus, l'eau, l'air, on peut déterminer un Z moyen en pondérant les numéros atomiques Z_i des corps simples par leur pourcentage en masse p_i dans le mélange.

$$\bar{Z} = \sum_i p_i \, Z_i$$

SPIERS a calculé $\bar{Z}$ pour des électrons secondaires émis lors de l'irradiation de tissu mou par des rayonnements électromagnétiques (30).

Le tableau 2-1 présente les valeurs de $\bar{Z}$ obtenues par SPIERS et celles calculées en utilisant les compositions du muscle, de l'air et de l'os données par BERGER et SELTZER (4) et celle de l'os compact donnée par la Commission Internationale de Protection contre les Rayonnements (C.I.P.R.) (7).

Tableau 2-1 Valeurs du Z de différents milieux

M I L I E U	Calcul	SPIERS (30)
Tissu mou (muscle)	7,09 *	7,42 7,46 7,2
Air	7,37 *	
Eau	7,22	
Os	9,25 * 10,86 **	13,3 13,8

* Composition du milieu donnée par BERGER et SELTZER (4)
**Composition du milieu donnée par la CIPR (7).

2 - 4 LE STRONTIUM-90

La chaîne de filiation radioactive du strontium-90 comprend l'yttrium-90 et le zirconium-90.

Le strontium-90 et l'yttrium sont des corps radioactifs émetteurs bêta moins, tandis que le zirconium est un corps stable.

$$^{90}Sr \xrightarrow{T = 28 \text{ ans}} {}^{90}Y \xrightarrow{T = 64 \text{ h.}} {}^{90}Zr \quad \text{stable} \qquad (24)$$

Lors d'une désintégration radioactive bêta moins, un électron de charge négative est émis par le noyau. L'énergie cinétique d'émission de cet électron est une variable aléatoire. Le spectre d'énergie est la densité de probabilité de l'énergie cinétique d'émission de l'électron. La forme du spectre et son énergie maximale sont caractéristiques du noyau de l'atome considéré.

Par désintégration radioactive un atome de strontium-90 se transforme en un atome d'yttrium-90 qui lui-même donne un atome de zirconium-90.

La période radioactive, temps pendant lequel le nombre d'atomes d'un corps radioactif est divisé par deux, du strontium-90 (28 ans) est très longue par rapport à celle de l'yttrium-90 (64 heures), aussi l'équilibre radioactif est-il rapidement atteint; c'est-à-dire que le nombre d'atomes d'yttrium est pratiquement égal au nombre d'atomes du strontium-90.

Dans l'os, les échanges biologiques sont lents, aussi peut-on supposer que les atomes d'yttrium restent situés à l'endroit où ils se sont formés par désintégration de strontium. A chaque désintégration d'un atome de strontium dans l'os, on peut associer l'émission de deux électrons : celui résultant de la désintégration de l'atome de strontium et celui de la désintégration d'un atome d'yttrium.

Le tableau 2-2 donne les énergies maximales et moyennes des spectres du strontium-90 et de l'yttrium-90 (figure 2-2) (5, 14, 24).

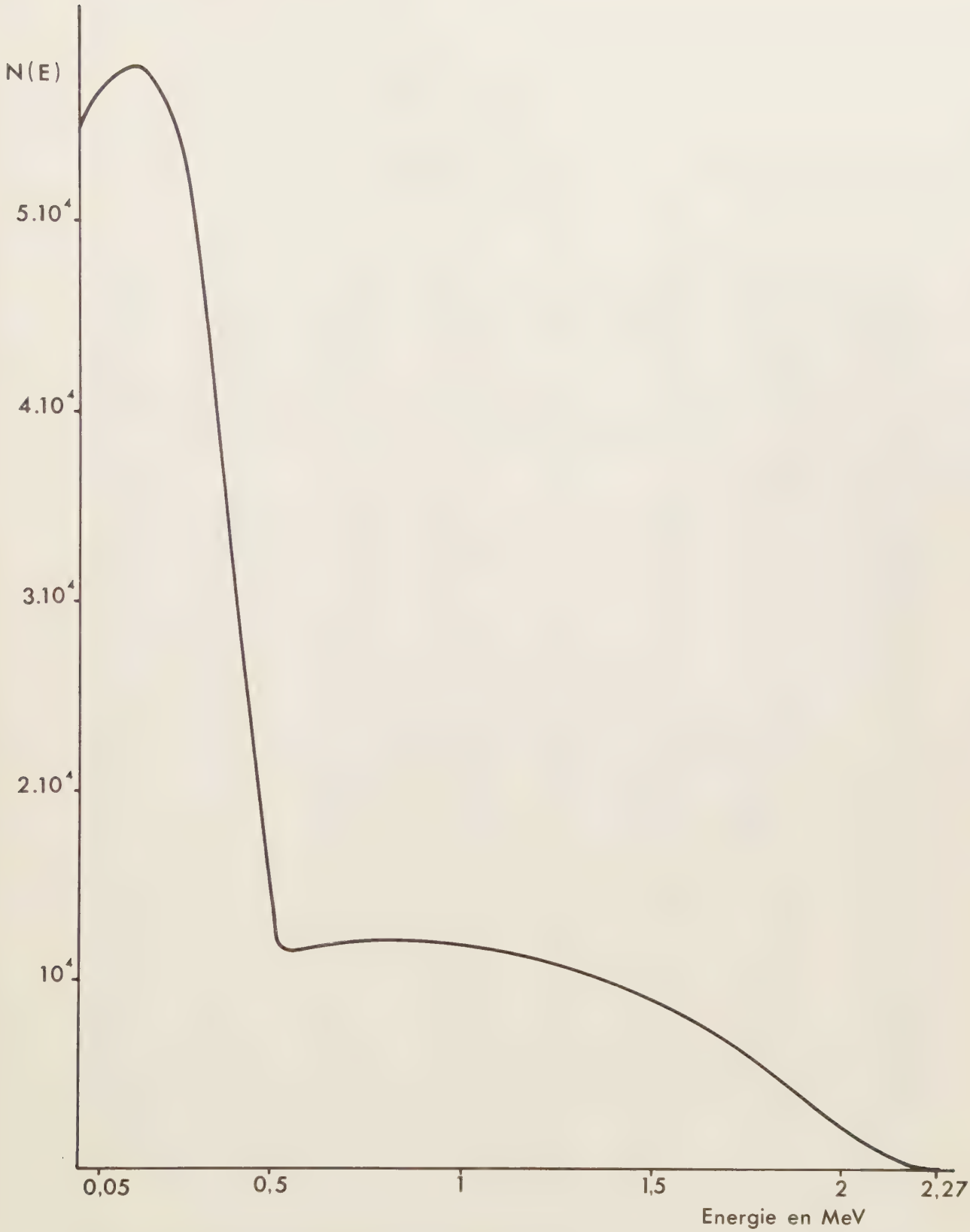


Figure. 2_2 : Spectre du mélange ^{90}Sr_^{90}Y

2 - 5 LES DONNEES PHYSIQUES UTILISEES

Les travées osseuses sont uniformément contaminées par une activité spécifique de 1 microcurie par gramme d'os, c'est-à-dire que $3,7.10^4$ électrons sont émis par seconde et par gramme d'os.

On utilisera :

- les valeurs du transfert linéique d'énergie et du parcours des électrons données par BERGER et SELTZER (4) pour le muscle ;

- les valeurs de la fonction J (x) données par SPENCER (28) pour l'air (tableau 2-1); pour les énergies de 0,15 - 0,25 - 1,1 et 1,5 MeV les fonctions J (x) sont obtenues par interpolation en utilisant la méthode proposée par SPENCER ;

- les spectres d'énergie du strontium-90, de l'yttrium-90 et du mélange strontium-90 - yttrium-90 à l'équilibre radioactif (tableau 2-2) (14).

Tableau 2 - 2

Radioélément	Energie maximale	Energie moyenne
Strontium-90	0,544 MeV	0,200 MeV
Yttrium-90	2,27 MeV	0,927 MeV

TABLEAU-2-1- FONCTION J(X) (28)

ENERGIE EN MEV

X	0.05	0.10	0.20	0.40	0.70	1.00	2.00
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.025	1.013	1.013	1.009	1.008	1.004	1.001	0.993
0.050	1.036	1.036	1.027	1.022	1.013	1.007	0.989
0.075	1.070	1.068	1.052	1.043	1.028	1.017	0.988
0.100	1.114	1.108	1.085	1.070	1.049	1.032	0.990
0.125	1.168	1.158	1.126	1.102	1.075	1.051	0.995
0.150	1.231	1.216	1.174	1.141	1.106	1.073	1.003
0.175	1.303	1.282	1.230	1.186	1.143	1.100	1.014
0.200	1.385	1.356	1.293	1.237	1.185	1.132	1.028
0.225	1.475	1.439	1.363	1.293	1.231	1.167	1.045
0.250	1.574	1.529	1.440	1.355	1.283	1.206	1.066
0.275	1.681	1.626	1.525	1.423	1.339	1.250	1.089
0.300	1.795	1.731	1.616	1.497	1.400	1.298	1.116
0.325	1.917	1.843	1.714	1.576	1.466	1.349	1.147
0.350	2.045	1.961	1.818	1.660	1.535	1.405	1.182
0.375	2.178	2.084	1.929	1.749	1.609	1.465	1.221
0.400	2.316	2.213	2.045	1.843	1.686	1.529	1.264
0.425	2.457	2.345	2.167	1.942	1.766	1.597	1.313
0.450	2.600	2.480	2.292	2.044	1.848	1.669	1.368
0.475	2.741	2.616	2.421	2.149	1.931	1.743	1.428
0.500	2.878	2.749	2.551	2.255	2.013	1.820	1.495
0.525	3.007	2.876	2.677	2.358	2.092	1.897	1.568
0.550	3.122	2.993	2.794	2.455	2.164	1.972	1.645
0.575	3.217	3.090	2.892	2.537	2.224	2.037	1.724
0.600	3.279	3.158	2.959	2.592	2.262	2.086	1.797
0.625	3.295	3.181	2.975	2.606	2.267	2.105	1.851
0.650	3.248	3.138	2.921	2.560	2.224	2.076	1.863
0.675	3.117	3.008	2.786	2.443	2.118	1.986	1.811
0.700	2.884	2.780	2.578	2.262	1.948	1.837	1.691
0.725	2.558	2.466	2.311	2.030	1.729	1.648	1.525
0.750	2.139	2.098	1.992	1.752	1.477	1.427	1.331
0.775	1.691	1.695	1.626	1.434	1.198	1.177	1.113
0.800	1.245	1.275	1.228	1.088	0.902	0.906	0.875
0.825	0.883	0.863	0.827	0.737	0.609	0.628	0.627
0.850	0.483	0.496	0.466	0.418	0.346	0.370	0.387
0.875	0.223	0.218	0.195	0.177	0.148	0.166	0.186
0.900	0.070	0.060	0.048	0.044	0.038	0.045	0.057
0.925	0.011	0.006	0.004	0.004	0.003	0.004	0.006
0.950	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.975	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

C H A P I T R E I I I

DESCRIPTION DU MILIEU OSSEUX

3 - 1 DESCRIPTION DU PROTOCOLE EXPERIMENTAL UTILISE POUR L'ETUDE DU MILIEU OSSEUX

3 - 1-1 Echantillonnage

Les résultats expérimentaux de WITMER (36) concernent un échantillon de 47 individus âgés de 0 à 30 ans (tableau 3-1), décédés d'affections n'atteignant pas le squelette. Une vertèbre cervicale et une vertèbre lombaire sont prélevées sur chacun d'entre eux.

Dans leurs parties médianes, des coupes sont effectuées :

- dans le sens sagittal pour la vertèbre cervicale (figures 3-1a et 3-1b);

- dans le sens transversal pour la vertèbre lombaire (figures 3-1c et 3-1d).

Ces coupes sont ensuite radiographiées et examinées au moyen d'un dispositif automatique (figure 1-1).

3 -1-2 Mesures

La coupe est placée sous l'objectif d'un microscope et l'image agrandie est projetée sur une table de lecture.

Le déplacement de la coupe est obtenu en couplant à la platine du microscope deux moteurs :

- l'un assurant les déplacements longitudinaux à vitesse constante dans les deux sens ;

- l'autre, les déplacements transversaux d'avant en arrière, en fin de parcours longitudinal.

T A B L E A U 3-1

Classement des individus en fonction de l'âge

CLASSE D'ÂGE	RANG	AGE
Prématurés	1 à 6	0 jour
moins de 1 mois	7	2 jours
	8	2
	9	2
	10	4
	11	1
	12	11
	13	17
	14	15
	15	19
	16	19
	17	19
	18 *	26
	19 *	26
1 à 3 mois	20	1 mois
	21	1
	22	2
	23	2
	24	2
	25	3
	26	3
3 à 6 mois	27	3,5 mois
	28	3,5
	29	4
	30	4
	31	5
	32	5
	33	5
	34	6
6 mois à 1 an	35	7,5 mois
	36	9
	37	10
	38	11
1 à 2 ans	39	14 mois
	40	15 mois
	41	18 mois
plus de 2 ans	42	2,5 ans
	43	2,5 ans
	44	3,5 ans
	45	5,5 ans
	46	8 ans
Adulte	47	30 ans

* Il s'agit du même enfant. Les mesures de longueurs de cordes ont été faites 2 fois. La lecture des enregistrements a été effectuée avec un pas de 10 um pour l'individu 18 et de 20 um pour l'individu 19.

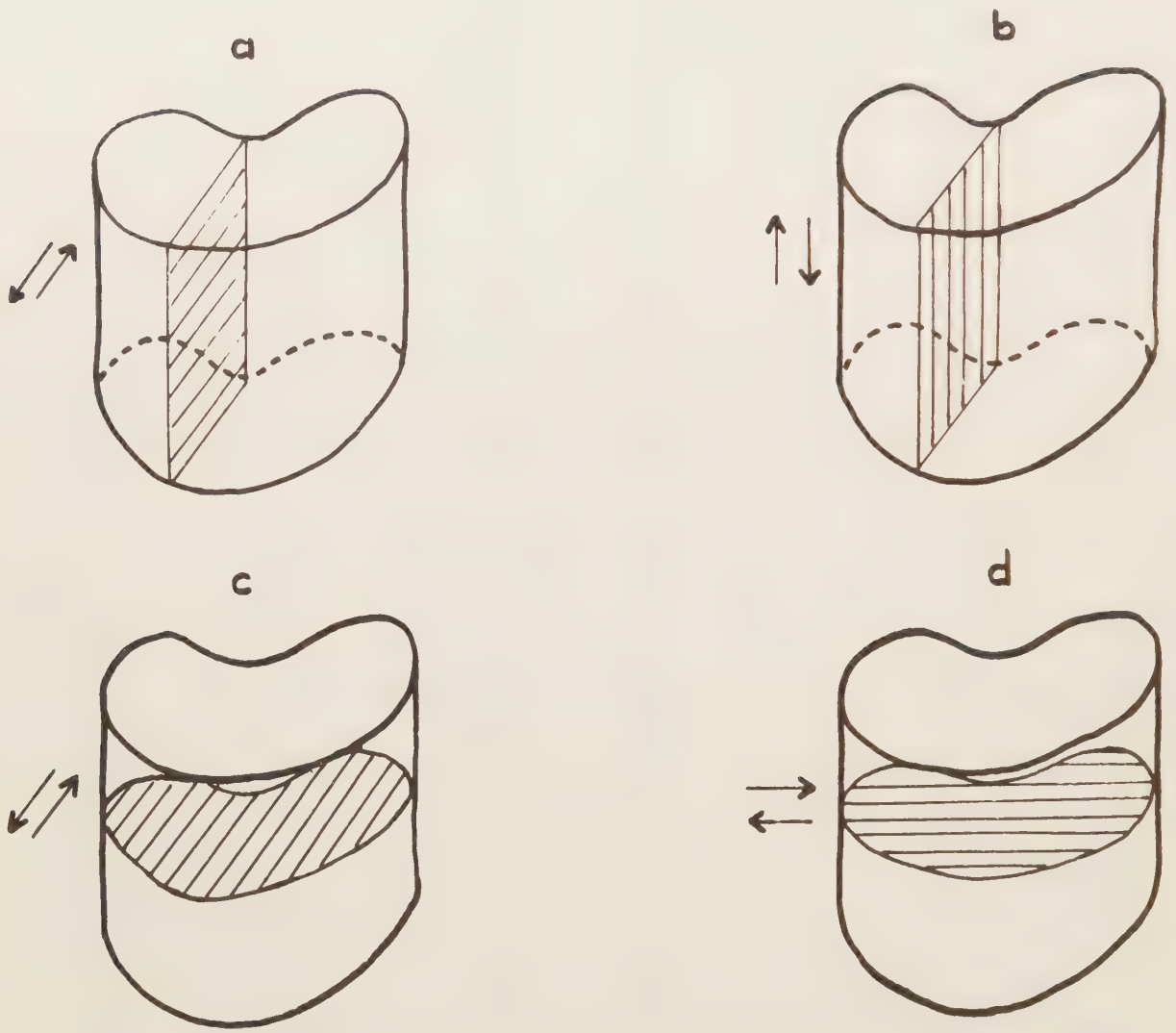


Figure . 3 _ 1 : Plan de coupe des vertèbres et directions de balayage

On obtient ainsi le balayage de toute la surface de la coupe. Celui-ci est effectué :

- pour la vertèbre cervicale d'avant en arrière (figure 3-1a) et de haut en bas (figure 3-1b) ;
- pour la vertèbre lombaire d'avant en arrière (figure 3-1c) et de gauche à droite (figure 3-1d).

Une photodiode est placée au centre de la table de lecture. Elle est sensible à la lumière transmise et sa réponse est proportionnelle au flux lumineux.

Les travées et les espaces ont, sur la radiographie, des densités optiques différentes. Le passage d'une travée dans un espace ou inversement d'un espace dans une travée entraîne un changement de l'état électrique de la diode. A l'aide d'une chaîne électronique on traduit ce changement en une impulsion.

Au cours de l'examen d'une coupe, les impulsions successives sont enregistrées sur deux pistes d'une bande magnétique :

- sur l'une, le passage travée - espace ;
- sur l'autre, le passage espace - travée.

3 - 1-3 Lecture des enregistrements

La bande magnétique est lue par couplage avec un analyseur 400 canaux. Les informations relatives aux travées sont cumulées dans les 200 premières mémoires, et celles relatives aux espaces dans les 200 autres mémoires.

Les impulsions enregistrées sur la bande magnétique commanderont le branchement sur l'un ou l'autre groupe de mémoires. Le déplacement de la coupe, devant l'objectif du microscope, se fait à vitesse constante. Par conséquent, le temps séparant deux impulsions successives sur la bande est proportionnel à une longueur de trajet dans une travée osseuse ou un espace médullaire.

Chaque mémoire reste ouverte un temps correspondant à une longueur (pas de 10 µm ou de 20 µm). Les 200 mémoires représentent donc des

classes de longueur de trajet rectiligne dans les travées ou les espaces. Le contenu de chaque canal est le nombre de travées ou d'espaces associé à la longueur définie par le numéro d'ordre du canal.

REMARQUE

Le protocole expérimental décrit ci-dessus ne permet pas le comptage des distances inférieures au pas choisi (10 µm ou 20 µm). Lorsque l'on effectue une coupe, la disposition des travées entraîne que certaines d'entre elles sont coupées en biseau. Sur la radiographie, ces parties de travées apparaîtront comme des zones de pénombre et certaines d'entre elles peuvent ne pas être enregistrées. Il y a donc presque sûrement un déficit dans le nombre de petites travées osseuses et des petits espaces mesurés. Les déplacements transversaux en dehors de la coupe sont faits à vitesse suffisamment lente pour que le temps séparant les impulsions correspondantes, à la fin d'un trajet longitudinal et au début du trajet suivant, soit assez grand pour ne pas être compté pour l'analyseur 400 canaux.

3 - 1-4 Résultats expérimentaux

A la fin de la lecture, on dispose de deux histogrammes représentant les distributions de longueurs de trajets rectilignes, ou de cordes, dans les travées osseuses et les espaces médullaires.

3 - 2 HYPOTHESES EXPERIMENTALES : LES VARIABLES ALEATOIRES CONSIDEREES

Les radiographies de coupes sagittales de la vertèbre cervicale (figure 1-1) montrent que les tailles des travées osseuses et des espaces médullaires varient beaucoup avec l'âge, surtout au cours des premiers mois de la vie.

Le regroupement des individus en classes d'âges a été choisi en fonction de cette évolution.

Soit I l'ensemble des individus :

$$I = \{ i / i = 1, n \}$$

Dans cet ensemble, chaque classe d'âge comprend un certain nombre d'individus (tableau 2).

T A B L E A U 3-2

Nombre d'individus par classe d'âge

CLASSE D'AGE	NOMBRE D'INDIVIDUS
Prématurés	6
0 - 1 mois	13
2 et 3 mois	7
4 à 6 mois	8
6 mois à 1 an	4
1 à 2 ans	3
plus de 2 ans	5
adulte	1

Pour chaque individu "i" on a étudié les distributions de trajets rectilignes dans les travées osseuses et les espaces médullaires des vertèbres.

3 - 2-1 Hypothèses d'homogénéité

On admet que les longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires sont indépendantes de leur localisation dans la vertèbre. Deux plans de coupe de vertèbre sont examinés suivant deux directions orthogonales de balayage du plan pour chaque individu.

On suppose que :

- les deux plans suffisent à décrire la vertèbre : l'examen d'un plan de coupe quelconque conduirait aux mêmes résultats ;

- les deux directions de balayage d'un plan de coupe suffisent à le décrire: sur une droite quelconque du plan de coupe, les travées et les espaces découpent des segments de droite suivant les distributions obtenues au cours de l'expérience.

3 - 2-2 Les variables aléatoires considérées

On mesure les longueurs de segments découpés par les travées et les espaces sur une droite, c'est-à-dire des longueurs de corde de travées, ou d'espaces.

Les variables aléatoires considérées sont :

- x : longueur d'une corde de travée osseuse ;

- y : longueur d'une corde d'espace médullaire.

Compte tenu des hypothèses d'homogénéité, on peut considérer que pour un individu on dispose de :

- un histogramme de la variable aléatoire **x** ;

- un histogramme de la variable aléatoire **y** .

Et pour une classe d'âge on a n_i histogrammes de chaque variable aléatoire.

Les résultats sont consignés dans les deux tableaux de contingence X et Y

X=J	I : 1	...	i	...	n	
1	n_{11}		n_{i1}		n_{n1}	$n_{.1}$
...						
j	n_{1j}		n_{ij}		n_{nj}	$n_{.j}$
...						
p	n_{1p}		n_{ip}		n_{np}	$n_{.p}$
	$n_{1.}$		$n_{i.}$		$n_{n.}$	N

Y=J	I : 1	...	i	...	n	
1	n'_{11}		n'_{i1}		n'_{n1}	$n'_{.1}$
...						
j	n'_{1j}		n'_{ij}		n'_{nj}	$n'_{.j}$
...						
p	n'_{1p}		n'_{ip}		n'_{np}	$n'_{.p}$
	$n'_{1.}$		$n'_{i.}$		$n'_{n.}$	N'

où :

$I = \{i / i = 1, n\}$ est l'ensemble des individus.

$J = \{j / j = 1, p\}$ est l'ensemble des caractères ou classes de longueurs de cordes.

n_{ij} est le nombre de travées appartenant à l'individu i et au caractère j.

$n_{.j}$ est le nombre de travées appartenant au caractère j pour l'ensemble des individus.

$n_{i.}$ est le nombre de travées appartenant à l'individu i.

N est le nombre total de travées.

n'_{ij}, $n'_{.j}$, $n'_{i.}$, N' ont la même signification pour les espaces.

A chaque individu correspond un âge et à chaque caractère une longueur. On peut donc considérer que les tableaux X et Y décrivent les liens entre les variables "âge" et les variables "tailles".

Mais les surfaces de coupe examinées ne sont pas comparables pour tous les individus. En effet, l'observation a porté parfois sur toute l'aire d'une coupe de vertèbre et d'autres fois, sur une partie seulement de cette aire.

Le nombre d'événements par histogramme n'est pas significatif. Aussi, dans la suite de l'étude, on a utilisé les tableaux de fréquences :

$$X' = \left(p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} , \; i \in I, \; j \in J \right)$$

$$Y' = \left(p'_{ij} = \frac{n'_{ij}}{n'_{i.}} , \; i \in I, \; j \in J \right)$$

3 - 3 LES DONNEES

On dispose de deux histogrammes par individu :

- un histogramme de fréquences des longueurs de corde dans les travées osseuses ;

- un histogramme de fréquences des longueurs de corde dans les espaces médullaires.

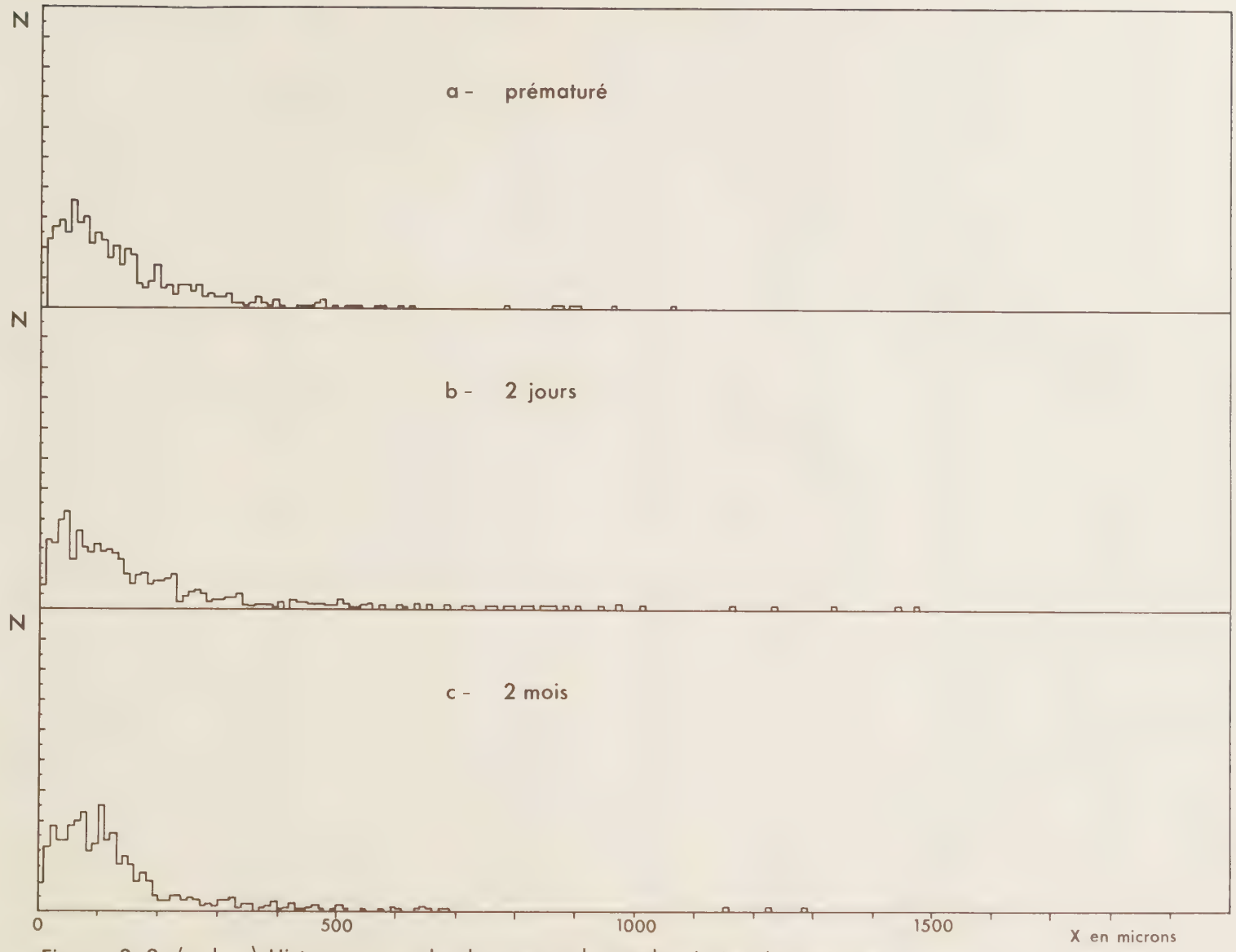


Figure. 3_2 : (a, b, c) Histogrammes des longueurs de cordes de travées osseuses

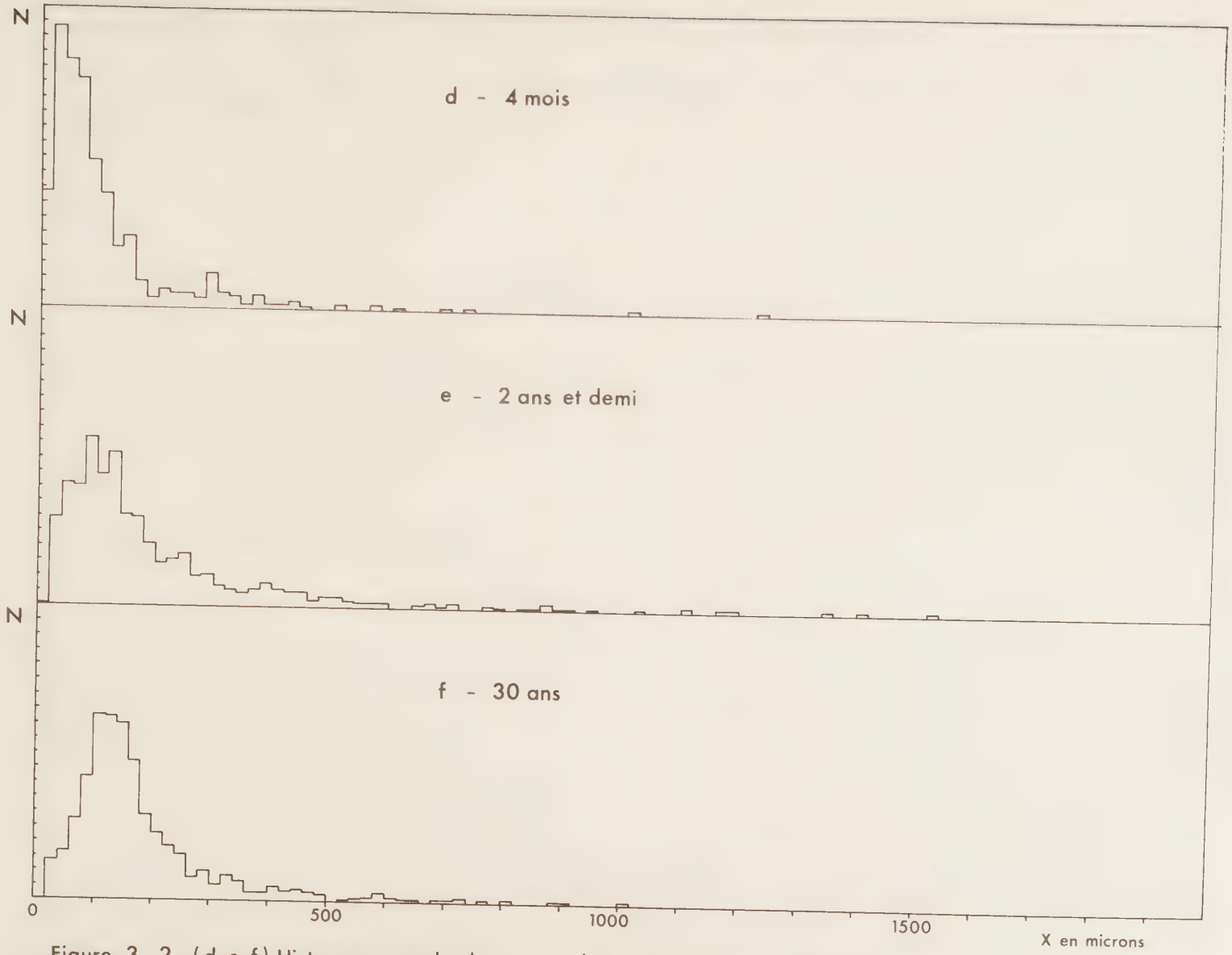


Figure. 3_2 : (d,e,f) Histogrammes des longueurs de cordes de travées osseuses

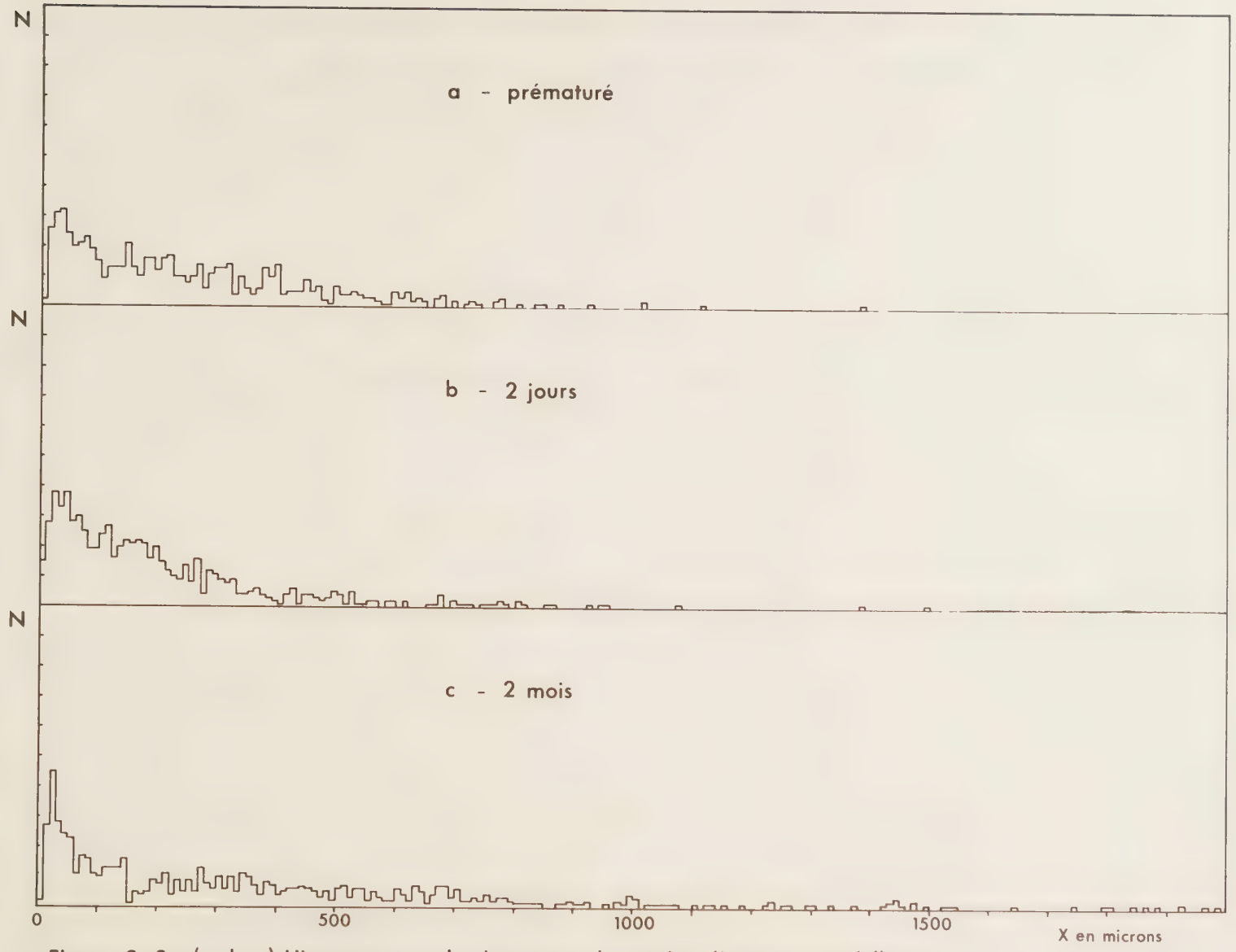


Figure. 3_3 : (a, b, c) Histogrammes des longueurs de cordes d'espaces médullaires

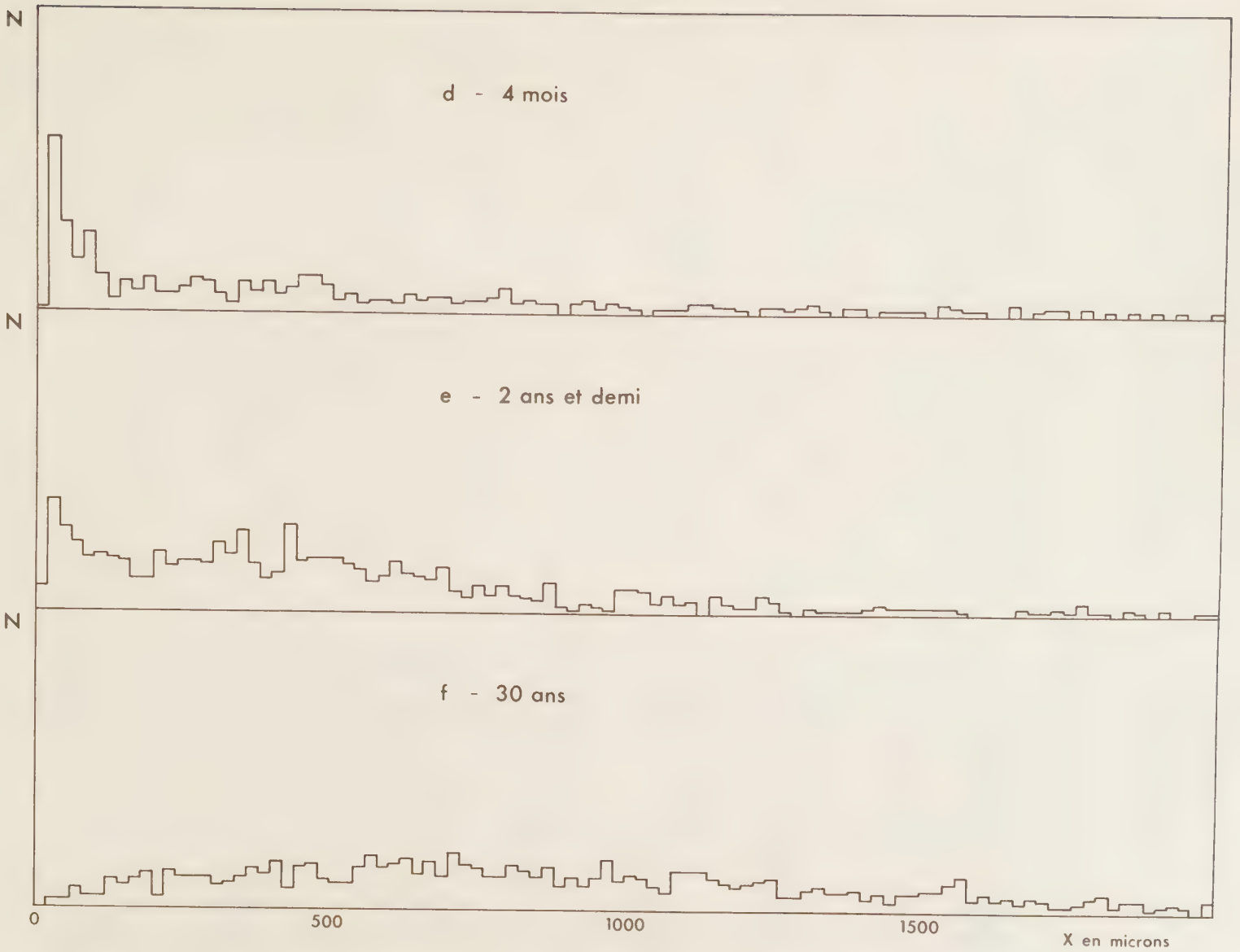


Figure. 3_3: (d,e,f) Histogrammes des longueurs de cordes d'espaces médullaires

Le découpage en classe est le même pour les travées osseuses et les espaces médullaires d'un individu. Chaque histogramme a 199 classes de taille 10 microns, pour les enfants de moins de trois mois et 20 microns pour les individus plus âgés.

3 - 3-1 Les travées osseuses

Les figures 3-2 présentent les histogrammes des longueurs de corde de travées osseuses de vertèbre pour des enfants prématuré, de 2 jours, de 2 mois et demi, de 4 mois, de deux ans et demi, et pour un adulte de 30 ans.

Ils se déforment peu avec l'âge. Leur mode est toujours inférieur à 200 microns et leur étendue varie de 500 à 1 500 microns.

La forme de tous ces histogrammes semble compatible avec l'hypothèse de log-normalité de la loi de distribution des travées osseuses.

3 - 3-2 Les espaces médullaires

On constate, pour les espaces médullaires, une évolution très nette avec l'âge (figures 3-3). Chez les enfants de moins de 1 mois, les histogrammes sont assez semblables (figures 3-3 a et b). Mais, à partir du 2ème mois, leurs étendues commencent à croître et l'on voit apparaître un palier entre 200 et 1 000 microns dont l'importance croît avec l'âge (figure 3-3 c, d et e). Chez l'adulte (figure 3-3 f) le pic des petites longueurs de corde d'espaces médullaires a disparu.

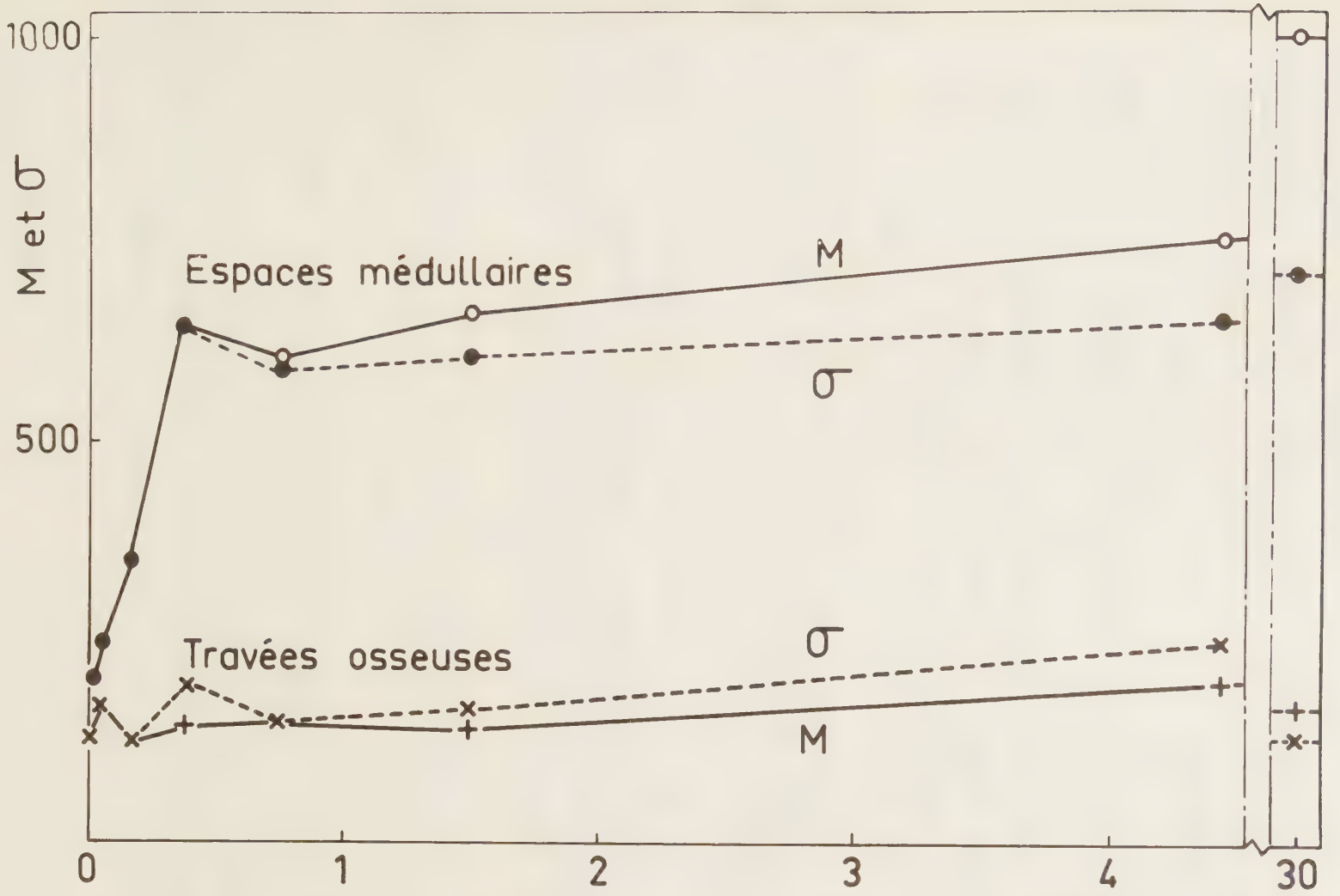


Figure 3_4.Moyenne et écart - type des distributions

3 - 3-3 Evolution avec l'âge de l'ensemble des données d'un individu

Les deux histogrammes de longueur de corde des travées osseuses et des espaces médullaires sont assez proches à la naissance (figure 3-2a et b, figure 3-3a et b). Ils deviennent de plus en plus différents avec l'âge des individus.

3 -3-4 Moyennes et écart-type des travées osseuses et des espaces médullaires

On a calculé pour chaque individu les moyennes et écarts-types des longueurs de corde des travées osseuses et des espaces médullaires. Les résultats sont regroupés par classe d'âge. On a estimé dans chacune d'entre elles les valeurs moyennes et les écarts-types "moyens".

La figure 3-4 présente l'évolution avec l'âge de la moyenne et de l'écart-type des longueurs de corde des espaces médullaires et des travées osseuses.

On constate une différence significative entre les individus de moins de 3 mois et ceux de plus de 3 mois, pour les longueurs de corde des espaces médullaires, tandis qu'il n'y a pas de différence significative entre les classes d'âge pour la longueur moyenne des cordes de travées osseuses.

Pour l'adulte, moyenne et écart-type ne sont pas significativement différents de ceux de la classe d'âge des enfants de plus de deux ans, aussi bien pour les espaces que pour les travées.

3 - 3-5 Test du χ^2 sur les histogrammes de longueurs de corde de travées osseuses

Pour juger de la qualité de l'hypothèse de log-normalité formulée à propos des histogrammes de longueur des cordes des travées osseuses, on a calculé le χ^2 d'adéquation pour certains individus (tableau 3-2).

Tableau 3-2

INDIVIDU	AGE	NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE	χ^2
1	0 jour	19	30,7
7	2 jours	25	79,4
22	2 mois	22	75,9
29	4 mois	12	18,4
42	2,5 ans	21	68,3
47	30 ans	19	90,4

L'hypothèse de log-normalité, si on se réfère aux χ^2 présentés dans le tableau 3-2 doit être rejetée quel que soit l'âge ; en réalité, l'échantillon étant de grande taille (supérieur à mille) il était évident a priori que cette hypothèse serait rejetée par le test. Malgré tout, compte tenu de la forme des histogrammes, nous considérerons que les populations considérées sont log-normales.

L'hypothèse la plus intéressante n'est pas la log-normalité des distributions, mais leur non-évolution au cours de l'âge. On sait que le test de KOLMOGOROV SMIRNOV permet de contrôler cette hypothèse.

3 - 4 BILAN ET CONCLUSION

Les histogrammes des fréquences des longueurs de corde de travées osseuses sont pratiquement les mêmes quel que soit l'âge de l'individu. La déformation des histogrammes relatifs aux espaces médullaires traduit donc l'évolution de l'organisation de l'os spongieux de la vertèbre au cours de l'âge de l'individu.

Pour tenter d'expliquer cette évolution, on a formulé les hypothèses suivantes :

- il existe une organisation de l'os à la naissance, et une autre organisation chez l'adulte. Le passage de l'une à l'autre s'effectue par un réarrangement des travées osseuses entre elles qui entraîne la déformation des histogrammes de fréquences des longueurs de corde des espaces médullaires. Les travées osseuses, tout en restant pratiquement identiques, se déplacent et occupent des positions privilégiées dans l'os spongieux.

- à la naissance, les espaces médullaires sont distribués au hasard dans la vertèbre, et leur disposition sur un axe peut être simulé à partir d'un processus ponctuel uniforme de Poisson (13).

Les travées osseuses et les espaces médullaires découpent, sur un axe traversant la vertèbre, des intervalles disjoints.

Soient des événements situés sur l'axe parcouru à vitesse constante. Si on note a_i et b_i, respectivement, le point d'entrée et le point de sortie dans le $i^{ème}$ espace médullaire, l'intervalle $[a_i, b_i]$ peut être assimilé à l'intervalle entre deux événements consécutifs dans un processus uniforme de Poisson. Cela résulte de l'uniformité de la répartition des "grains de sable" (travées osseuses) dans le volume médullaire.

La loi des intervalles $[a_i, b_i]$ est alors une loi exponentielle.

Le fait que la valeur modale des histogrammes de fréquences relatives aux espaces médullaires ne soit pas à l'origine provient de la difficulté à mesurer les très petites longueurs. La modification, au cours de l'âge, de la disposition des travées osseuses et des espaces médullaires résulte de la régénération de l'os et de sa croissance.

On peut penser que l'âge a pour effet d'élargir d'une part, de façon uniforme les espaces médullaires, et d'autre part d'effacer certaines travées osseuses. La distribution des espaces médullaires serait donc obtenue :

- en introduisant un coefficient d'élargissement des espaces ;

et - à partir du processus poissonnien initial, en effaçant chacune des travées avec une probabilité p.

Le pourcentage de la surface d'une coupe occupée par les travées osseuses (tableau 3-3) reste pratiquement constant, au-dessus de 3 mois (36). Et les microradiographies de coupes de vertèbres (figure 1-1) montrent que, si la taille de la vertèbre change, il n'y a pas de différence notable dans la répartition des travées osseuses et des espaces médullaires entre les individus de 5 mois, 2,5 ans et 8 ans. L'influence de la croissance dans l'os spongieux serait donc contrebalancée par l'apparition de nouvelles travées.

Tableau 3-3

Prématuré	1 mois	1 à 3 mois	3 à 6 mois	6 mois à 1 an	1 à 2 ans	2 ans	adulte
46	43	30	20,5	22	20,5	23	16

Au chapitre V, compte tenu de ce schéma de développement de l'os spongieux et aussi par souci de simplicité, on a supposé que la population des espaces médullaires était un mélange de trois populations (2 lois exponentielles et une loi gamma).

C H A P I T R E I V

ANALYSE DE DONNEES SUR HISTOGRAMMES

4 - 1 RAPPELS THEORIQUES

Deux techniques d'analyse de données linéaires ont été utilisées pour décrire l'ensemble des histogrammes :

- l'analyse en composantes principales ;
- l'analyse factorielle des correspondances.

Ces deux techniques sont en réalité très proches l'une de l'autre. Aussi, dans ce paragraphe, les présente-t-on en jouant sur les métriques, comme des cas particuliers de techniques plus générales.

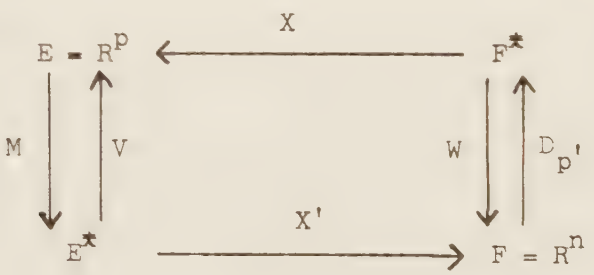
4 - 1-1 Schéma de dualité

X est un tableau de données de dimension (p x n) dont les p lignes symbolisent les caractères et les n colonnes, les individus.

A chaque individu, on associe la masse p_i avec :

$$p_i > 0 \qquad i = 1, n \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

En analyse en composantes principales on est amené à considérer le schéma de dualité



où :

- M est l'isomorphisme associé à la métrique euclidienne choisie sur l'espace des individus E ;

- D_p est l'isomorphisme associé à la métrique euclidienne des poids définie sur l'espace des caractères F (La matrice associée à D_p est la matrice diagonale des poids p_i);

- $W = X' \circ M \circ X$

  $V = X \circ D_p \circ X'$

Si X est centré, à l'application V est associée sur E^* la forme quadratique d'inertie V.

4 - 1-2 Analyse en composantes principales

En analyse en composantes principales, le tableau X étant centré, on munit, en général, l'espace E :

- soit de la métrique $M = I_p$ (identité);
- soit de la métrique $M = D_{1/\sigma^2}$, dont la matrice associée est la matrice diagonale des inverses des carrés des écarts-types.

Cette deuxième métrique permet de s'affranchir des unités de mesures (résultat invariant par changement d'échelle).

Les facteurs principaux $\underline{a}_i$ sont alors les vecteurs propres de $M \circ V$

Soit $M = D_{1/\sigma^2}$

$$D_{1/\sigma^2} \circ V(\underline{a}_i) = \lambda_i \underline{a}_i$$

et si on pose :

$$\underline{b}_i = D_\sigma \underline{a}_i$$

$$R = D_{1/\sigma} \circ V \circ D_{1/\sigma}$$

$$R \underline{b}_i = \lambda_i \underline{b}_i$$

La matrice associée à R n'est autre que la matrice de corrélation.

4 - 1.3 Analyse canonique classique

Le problème de l'analyse canonique classique, quoique a priori différent de l'analyse en composantes principales, est identique mathématiquement parlant.

Z est ici un tableau de dimensions (p x n), centré, réunion de deux sous-tableaux :

. X à p_1 lignes et n colonnes,
. Y à p_2 lignes et n colonnes ($p = p_1 + p_2$)

A la partition du tableau Z correspond une partition de la matrice associée à la forme quadratique d'inertie V :

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$$

où V_{11} et V_{22} sont supposées régulières.

Effectuer une analyse canonique pour mettre en évidence la dépendance entre les deux ensembles de caractères associés à X et Y revient à faire une analyse en composantes principales dans R^p muni de la métrique :

$$M = \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & V_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$M \circ V \ (\underline{a}_i) = \lambda_i \ \underline{a}_i$$

avec :

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix}$$

a_{i1} et a_{i2} sont des formes linéaires sur R^{p1} et R^{p2}, cela implique :

$$V_{11}^{-1} \circ V_{12} \ (\underline{a}_{i2}) = (\lambda_i - 1) \ \underline{a}_{i1}$$

$$V_{22}^{-1} \circ V_{21} (\underline{a}_{i1}) = (\lambda_i - 1) \underline{a}_{i2}$$

D'où :

$$\boxed{V_{11}^{-1} \circ V_{12} \circ V_{22}^{-1} \circ V_{21} (\underline{a}_{i1}) = (\lambda_i - 1)^2 \underline{a}_{i1}}$$

et si : $\lambda_i \neq 1$:

$$\boxed{\underline{a}_{i2} = \frac{1}{\lambda_i - 1} V_{22}^{-1} \circ V_{21} (\underline{a}_{i1})}$$

On a bien retrouvé les équations des facteurs canoniques.

REMARQUE -

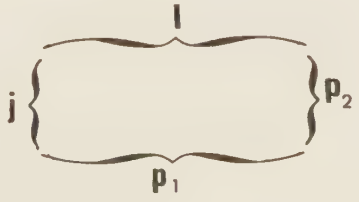
Si au lieu de deux paquets de caractères, on dispose de k paquets, il est logique de penser que pour étudier la dépendance globale entre les k groupes de caractères on peut effectuer une analyse en composantes principales dans R^p avec $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$, cet espace étant muni de la métrique:

$$M = \begin{vmatrix} V_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & V_{kk}^{-1} \end{vmatrix}$$

En particulier, l'analyse en composantes principales sur tableau de corrélation devient un cas particulier de ce qui précède : on considère les p variables comme constituant p paquets.

4 - 1-4 Analyse factorielle des correspondances

On sait que l'analyse factorielle de correspondance effectuée sur un tableau de contingence I x J



revient à effectuer une analyse canonique classique sur les indicatrices respectivement associées aux ensembles I et J.

Ici, pour revenir au paragraphe 4 - 3 :

- X désigne le tableau p_1 x n, où les n individus sont repérées par la valeur des p_1 indicatrices associées à I ;

- Y désigne le tableau p_2 x n, associé aux p_2 indicatrices de J

- $V_{11} = XoD_p oX' = \frac{1}{n} XoX' = D_{p_x}$
- $V_{22} = YoD_p oY' = \frac{1}{n} YoY' = D_{p_y}$
- $V_{12} = XoD_p oY' = \frac{1}{n} XoY' = P$
- $V_{21} = V'_{12} = P'$

où :

- l'application P a pour matrice le tableau dont les éléments sont les probabilités p_{ij} associées aux couples (i,j) de I x J;

- la matrice diagonale associée à D_{p_x} a pour éléments diagonaux les probabilités marginales

$$p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij} \qquad i \in I$$

- et la matrice diagonale associée à D_{p_y} a pour éléments

$$p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij} \qquad j \in J$$

On est donc amené, d'après 4 - 3, pour obtenir les facteurs principaux, à tirer les vecteurs et valeurs propres de

$$M \circ V = \begin{pmatrix} D_{1/p_x} & 0 \\ 0 & D_{1/p_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{p_x} & P \\ P & D_{p_y} \end{pmatrix}$$

et on aboutit bien aux équations classiques donnant les facteurs

$$D_{1/P_x} \circ P \circ D_{1/p_y} \circ P' (\underline{a}_{i_1}) = (\lambda_i - 1)^2 \underline{a}_{i_1}$$

et si $\lambda_i \neq 1$

$$\underline{a}_{i_2} = \frac{1}{\lambda_i - 1} D_{1/p_y} \circ P' (\underline{a}_{i_1})$$

REMARQUE

Les indicatrices n'étant pas centrées, les deux sous-espaces vectoriels engendrés prespectivement par les deux ensembles d'indicatrices contiennent la droite des constantes. Aussi l'équation ci-dessus admet-elle la solution triviale :

$$(\lambda_1 - 1)^2 = 1$$

4 - 2 APPLICATIONS

Dans le but d'alléger les données, tout en conservant le maximum d'information, on reconstruit les histogrammes de fréquences des longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires. Le découpage en classe à pas variable (tableau 4-1) est choisi de telle manière que le contenu de chaque classe, pour les espaces médullaires, soit à peu près le même pour un individu de la classe d'âge de 1 à 3 mois.

Tableau 4 - 1

Indice de la classe	Longueurs de corde en microns
1	20 - 40
2	40 - 60
3	60 - 80
4	80 - 100
5	100 - 120
6	120 - 160
7	160 - 200
8	200 - 240
9	240 - 280
10	280 - 320
11	320 - 400
12	400 - 480
13	480 - 560
14	560 - 640
15	640 - 720
16	720 - 880
17	880 -1040
18	1040 -1200
19	1200 -1520
20	1520 -1980
21	plus de 1980

Ce choix résulte des remarques suivantes :

- la classe d'âge de 1 à 3 mois semble être la classe centrale de l'échantillon ;

- les histogrammes de fréquences des longueurs de corde d'espaces médullaires se déforment plus que ceux relatifs aux travées osseuses.

Tant en analyse en composantes principales qu'en analyse factorielle des correspondances, l'analyse est effectuée sur :

- l'ensemble des histogrammes de fréquences des longueurs de corde de travées osseuses ;

- l'ensemble des histogrammes de fréquences des longueurs de corde d'espaces médullaires ;

- l'ensemble de tous les histogrammes.

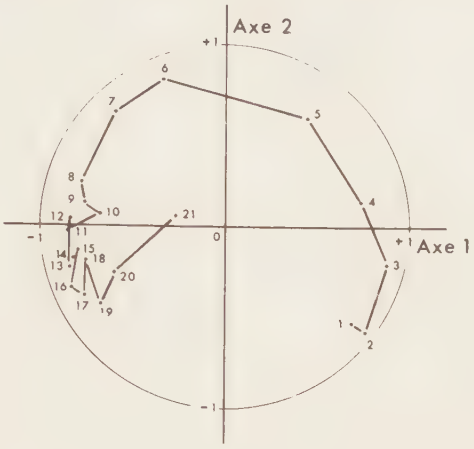
Dans les trois cas, le nombre de caractères : fréquence dans une classe de longueur, est égal à 21.

Le nombre d'individus : histogrammes, est de 47 dans les deux premiers cas et de 94 dans le dernier cas. Dans celui-ci, chaque enfant est représenté dans l'espace des "individus" par deux points : un "individu - travées osseuses" et un "individu - espaces médullaires".

4 - 2-1 Analyse en composantes principales

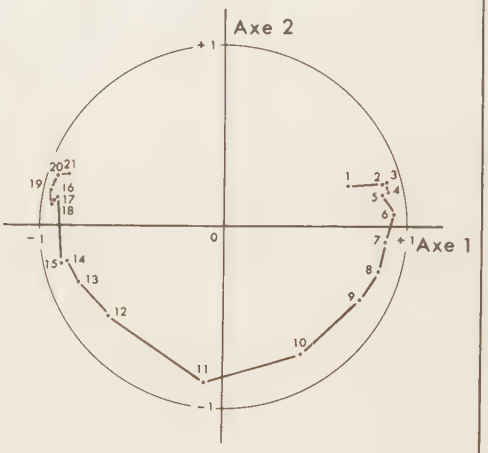
4 - 2-1-1 Valeurs propres des matrices de corrélations et contribution à l'inertie des sous-espaces principaux

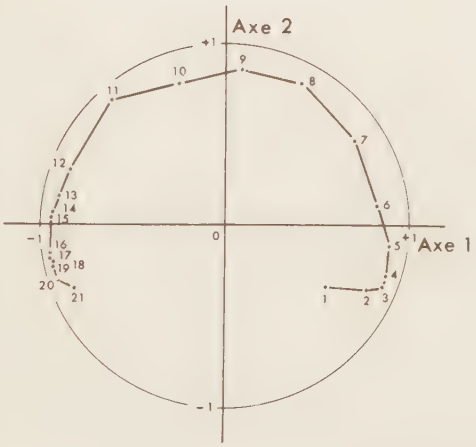
Les valeurs propres des matrices de corrélation dans les trois cas cités ci-dessus et les parts d'inertie expliquée par les axes principaux et les sous-espaces principaux sont données dans le tableau 4-2.



a - Travées osseuses

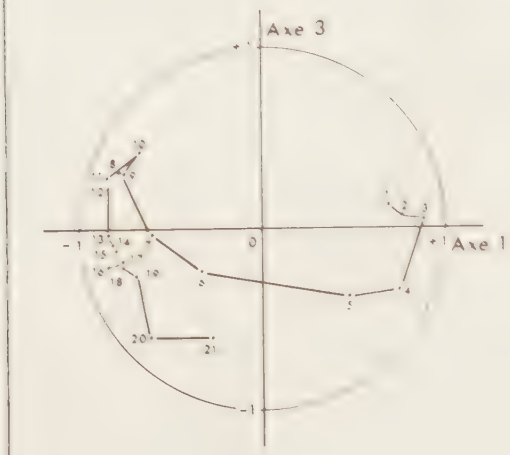
b - Espaces médullaires





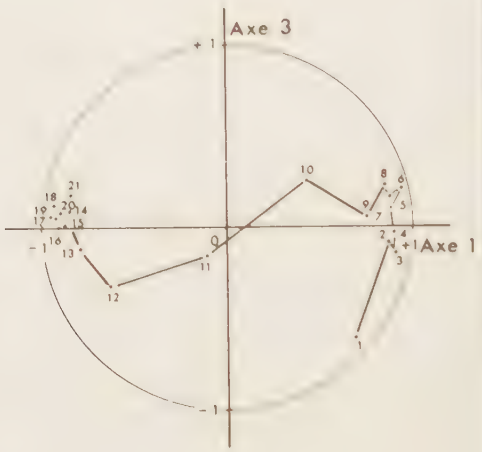
c - Ensemble " Travée - Espace "

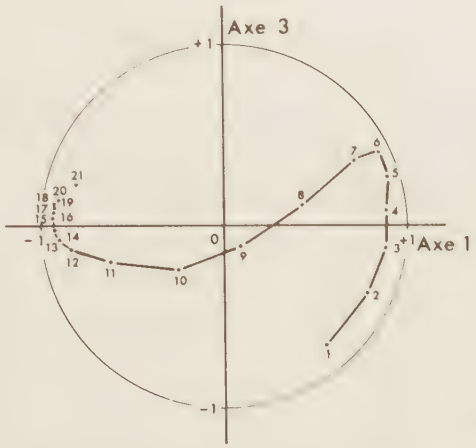
Figure. 4_1: Représentation des caractères dans le plan 1-2



a - Travées osseuses

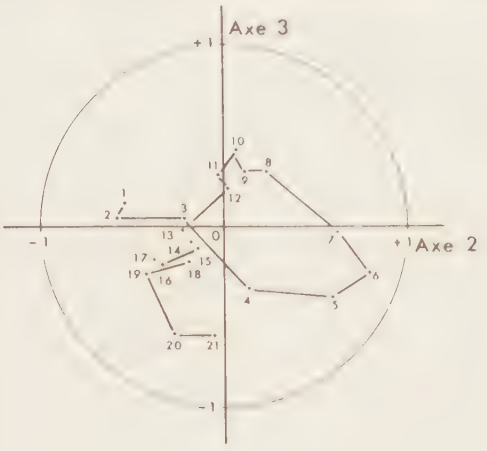
b - Espaces médullaires



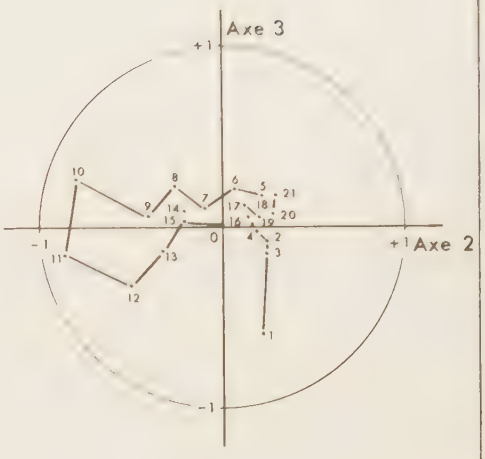


c - Ensemble "Travée - Espace"

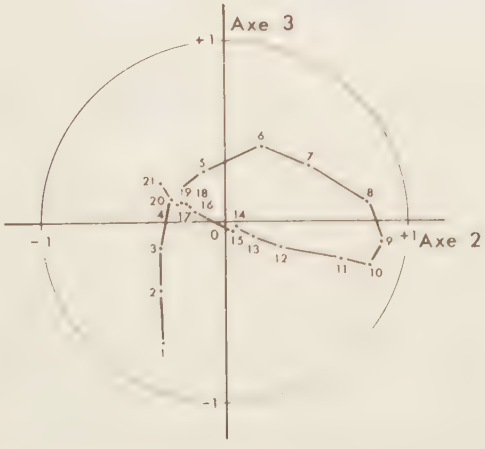
Figure. 4 _ 2 : Représentation des caractères dans le plan 1 _ 3



a - Travées osseuses



b - Espaces médullaires



c - Ensemble "Travée - Espace"

Figure . 4 _ 3 : Représentation des caractères dans le plan 2 _ 3

Tableau 4 - 2

	Valeurs propres	Contribution à l'inertie	Contribution cumulée
Travées osseuses	10,87 2,83 1,79	0,5178 0,1351 0,0854	0,5178 0,6529 0,7383
Espaces médullaires	14,23 2,42 0,82	0,6776 0,1151 0,0392	0,6776 0,7927 0,8319
Ensemble travée - espace	13,47 3,61 1,26	0,6413 0,1719 0,0600	0,6413 0,8132 0,8732

La part d'inertie expliquée par le plan principal 1-2 est plus faible pour les travées osseuses que pour les espaces médullaires et la réunion "travée - espace". La représentation dans ce plan principal donne une bonne description des données surtout dans les deux derniers cas.

4 - 2-1.2 Corrélations entre les caractères et les premières composantes principales

Les corrélations entre les caractères ou classes de longueur de cordes et les premières composantes principales sont présentées dans :

- les figures 4-1-a, 4-2-a et 4-3-a pour les composantes principales 1 et 2 ;

- les figures 4-1-b, 4-2-b et 4-3-b pour les composantes principales 1 et 3 ;

- les figures 4-1-c, 4-2-c et 4-3-c pour les composantes principales 2 et 3.

Dans les trois cas traités : les travées osseuses, les espaces médullaires et l'ensemble "travée - espace", on obtient la même disposition des caractères sur le graphique des corrélations. Les caractères sont disposés dans le plan des deux premières composantes principales (plan principal 1-2) sur un arc de cercle de rayon sensiblement égal à la racine carrée de la part d'inertie expliquée par le plan principal. Dans les plans 1-3 et 2-3, on trouve respectivement des dispositions en "S" et en "α ".

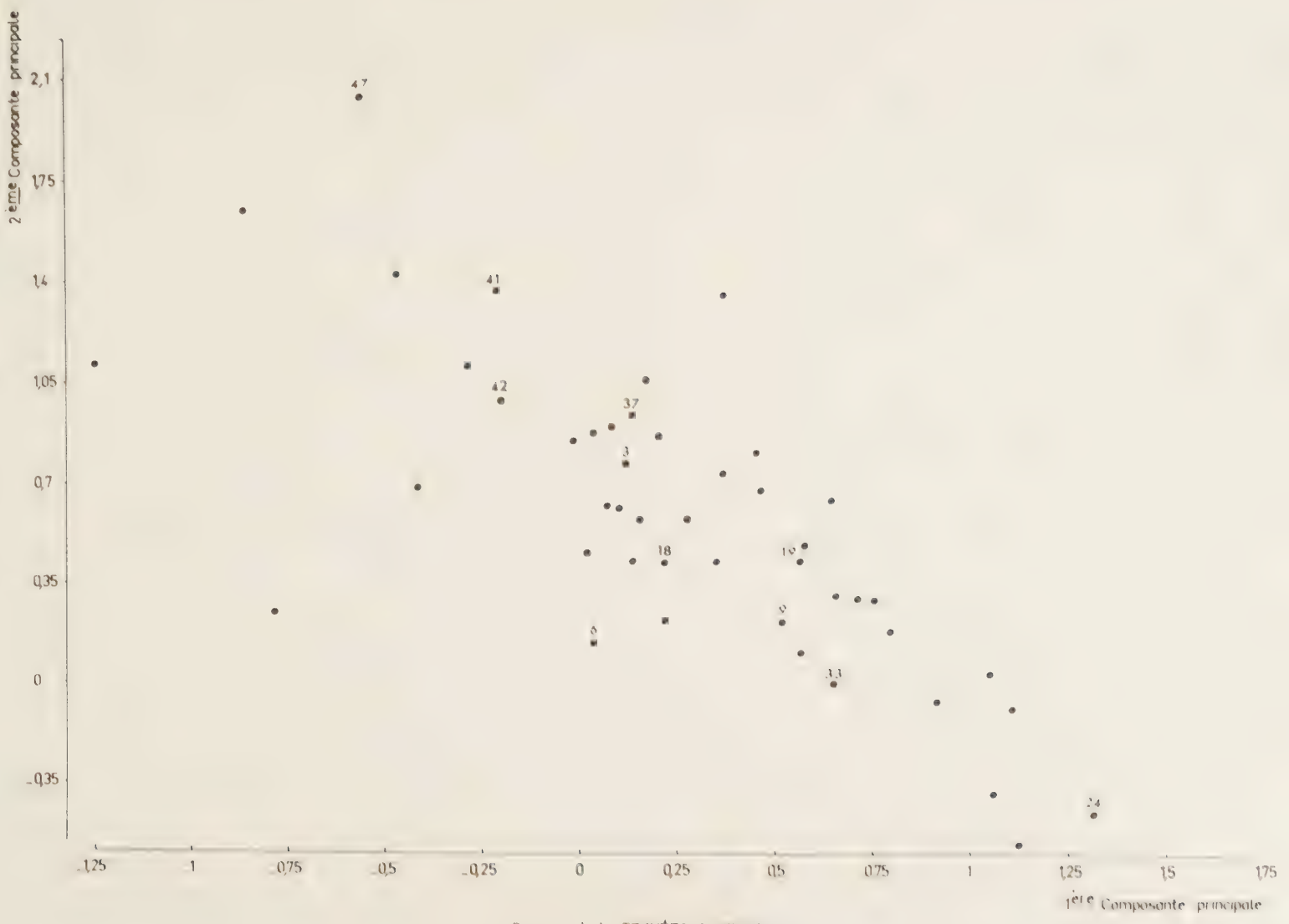


Figure . 4-4 _ TRAVÉES OSSEUSES

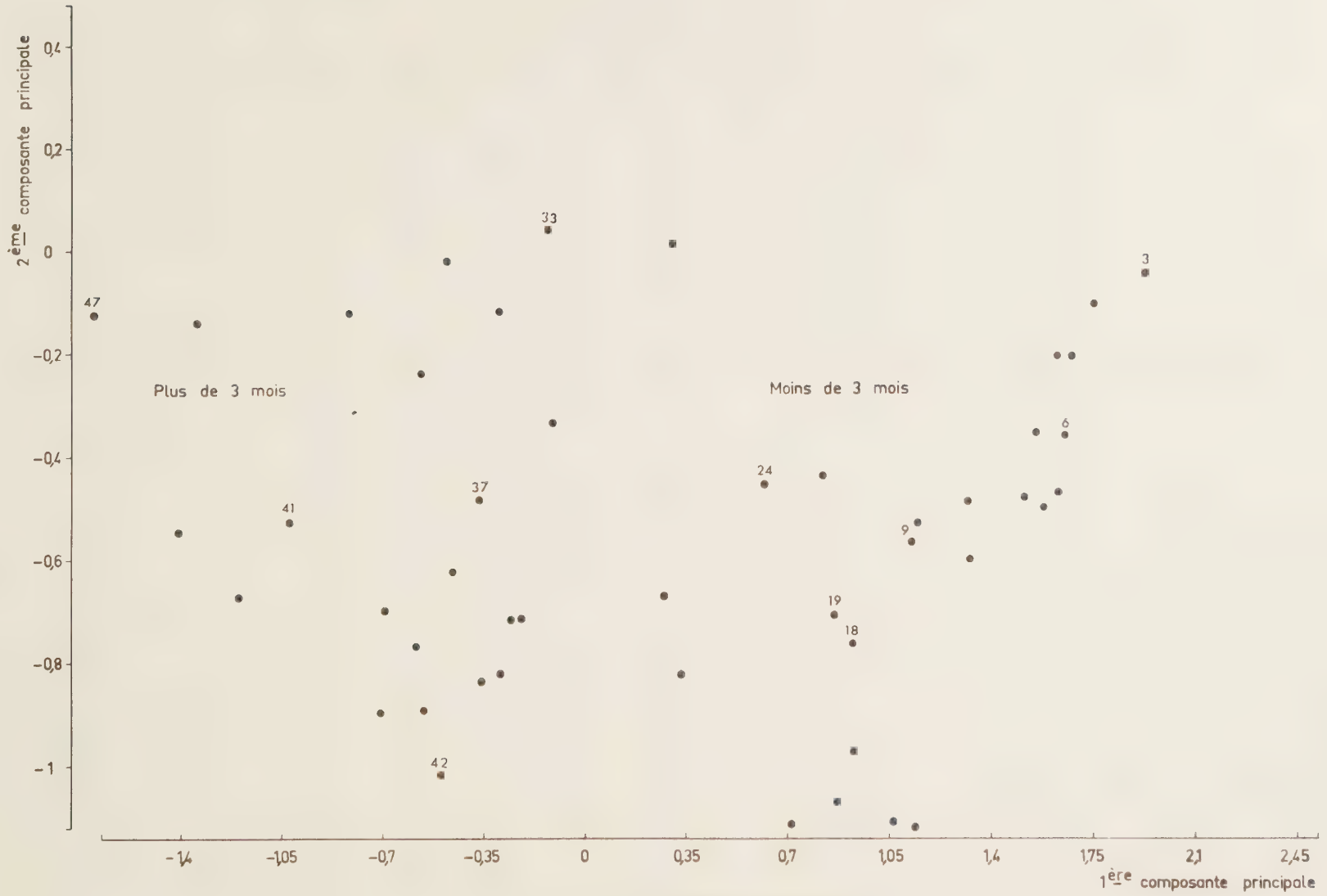


Figure.4-5 - ESPACES MÉDULLAIRES

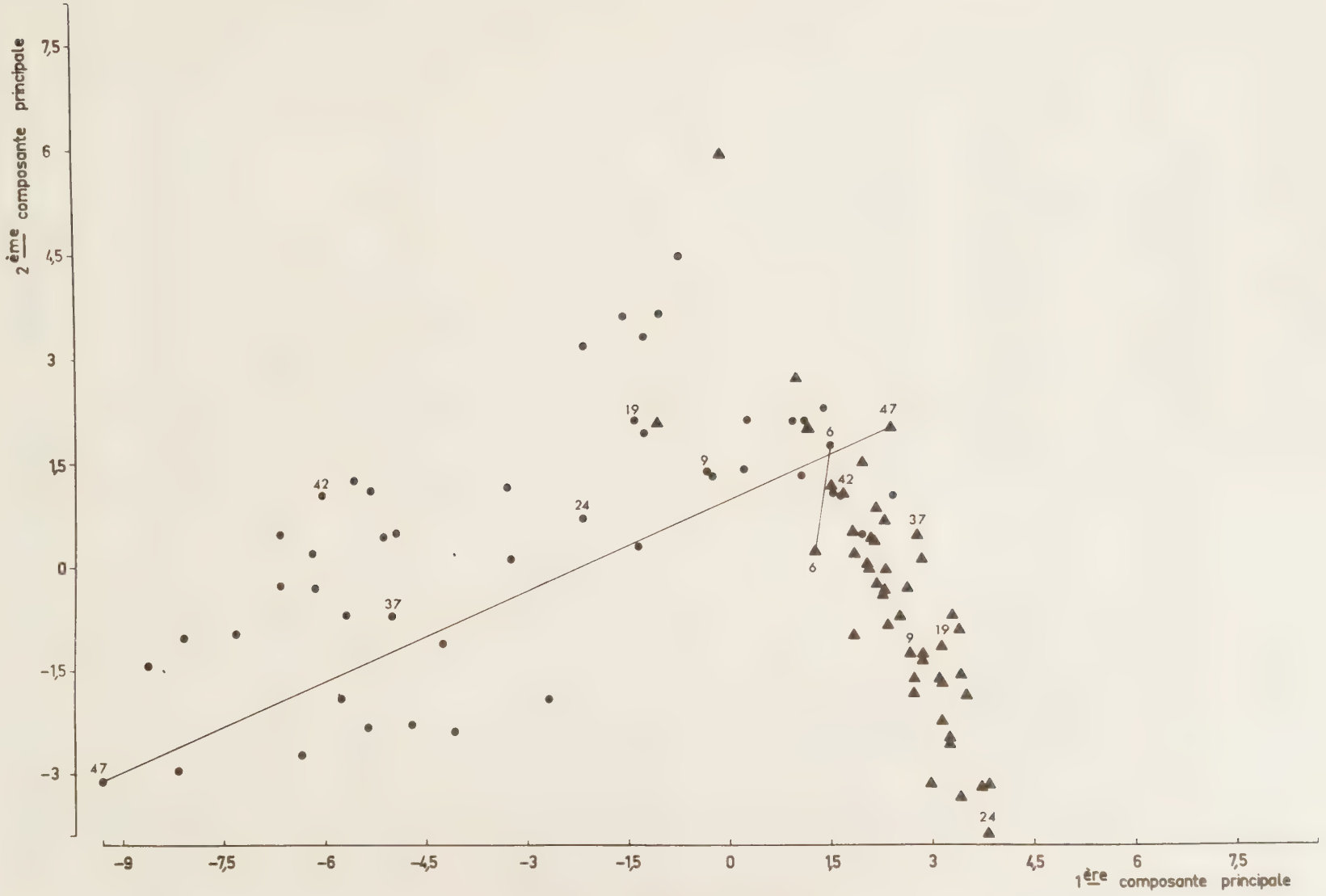


Figure. 4-6 - ENSEMBLE " TRAVÉES (▲) - ESPACES (●) "

La première composante principale oppose les petites longueurs et les grandes longueurs de corde , tandis que la seconde est associée aux longueurs intermédiaires.

4 - 2-1.3 Description des individus dans les plans principaux

La description des individus dans le plan principal 1-2 est présentée:

- dans la figure 4-4 pour les travées osseuses ;
- dans la figure 4-5 pour les espaces médullaires ;
- dans la figure 4-6 pour l'ensemble "travée - espace".

Pour les espaces médullaires, on obtient un classement des individus suivant le premier axe principal à peu près équivalent au classement par âge. Les individus les plus jeunes (moins de trois mois) se placent dans la zone des petites longueurs de corde et les plus âgés dans celle des grandes longueurs de corde .

Sur le second axe principal, les histogrammes individus sont classés suivant l'importance relative des classes (8 à 11) de longueurs intermédiaires de corde . Pour l'ensemble "travée - espace", les nuages de points représentant respectivement les "individus travées" et les "individus espaces" sont séparés sauf pour les enfants de moins de 1 mois. Les axes de ces deux nuages sont à peu près orthogonaux.

Enfin, la distance séparant les points représentatifs "travée - espace" d'un même individu croît avec son âge. Sur la figure 4-6 on a joint les points représentatifs d'un enfant prématuré et de l'adulte.

4 - 2-2 Analyse factorielle des correspondances

On rappelle que l'analyse factorielle des correspondances a été effectuée sur les fréquences relatives et non sur les fréquences absolues, car les nombres d'événements par individu ne sont pas comparables comme on l'a vu en 3-2-2.

4 - 2-2.1 Valeurs propres et contribution à l'inertie expliquée

Les trois plus grandes valeurs propres et leurs parts d'inertie expliquée dans les trois cas traités sont données dans le tableau 4-3.

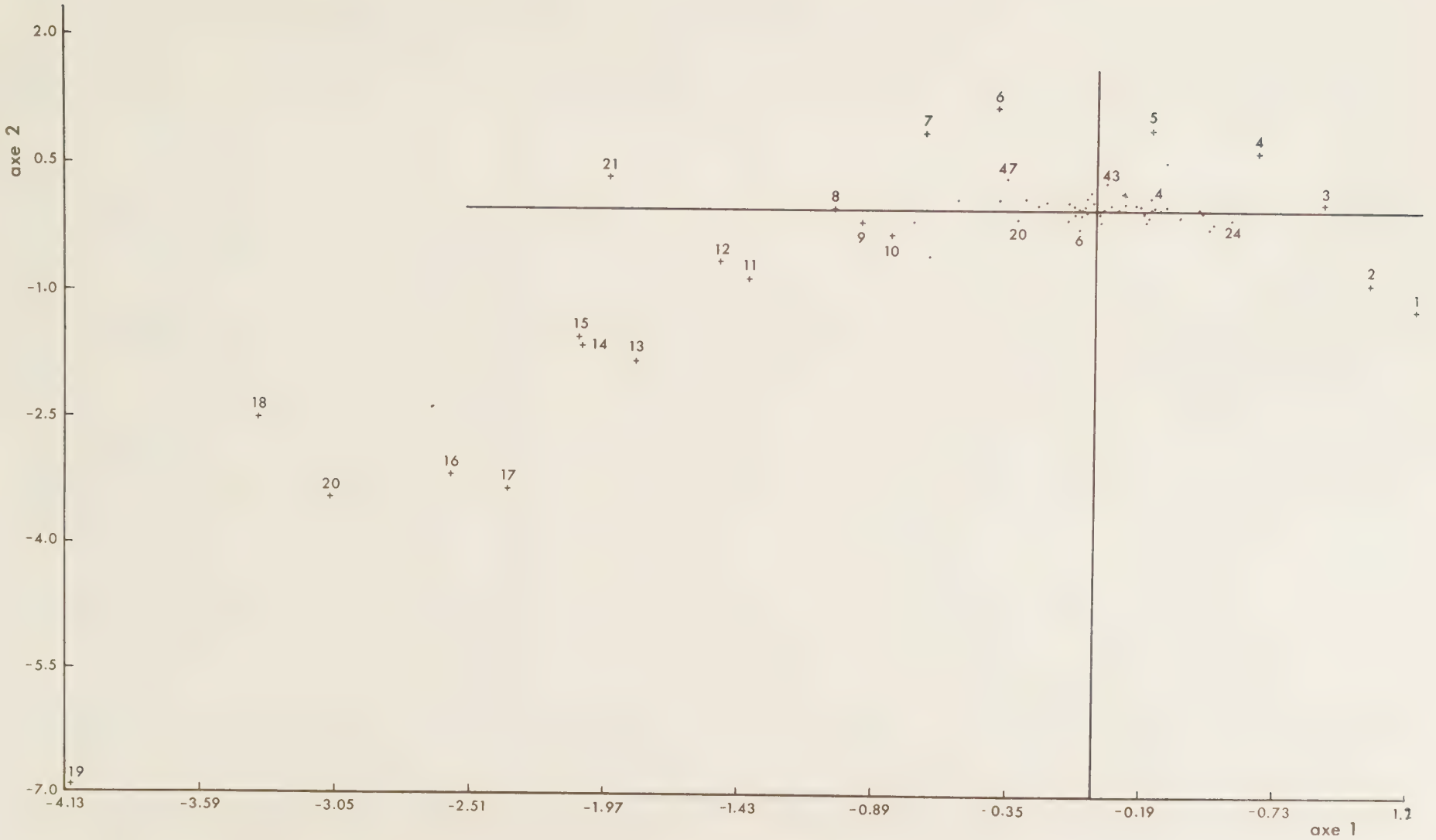


Figure.4_7: Représentation des individus (·) et des caractères (+) - Travées osseuses

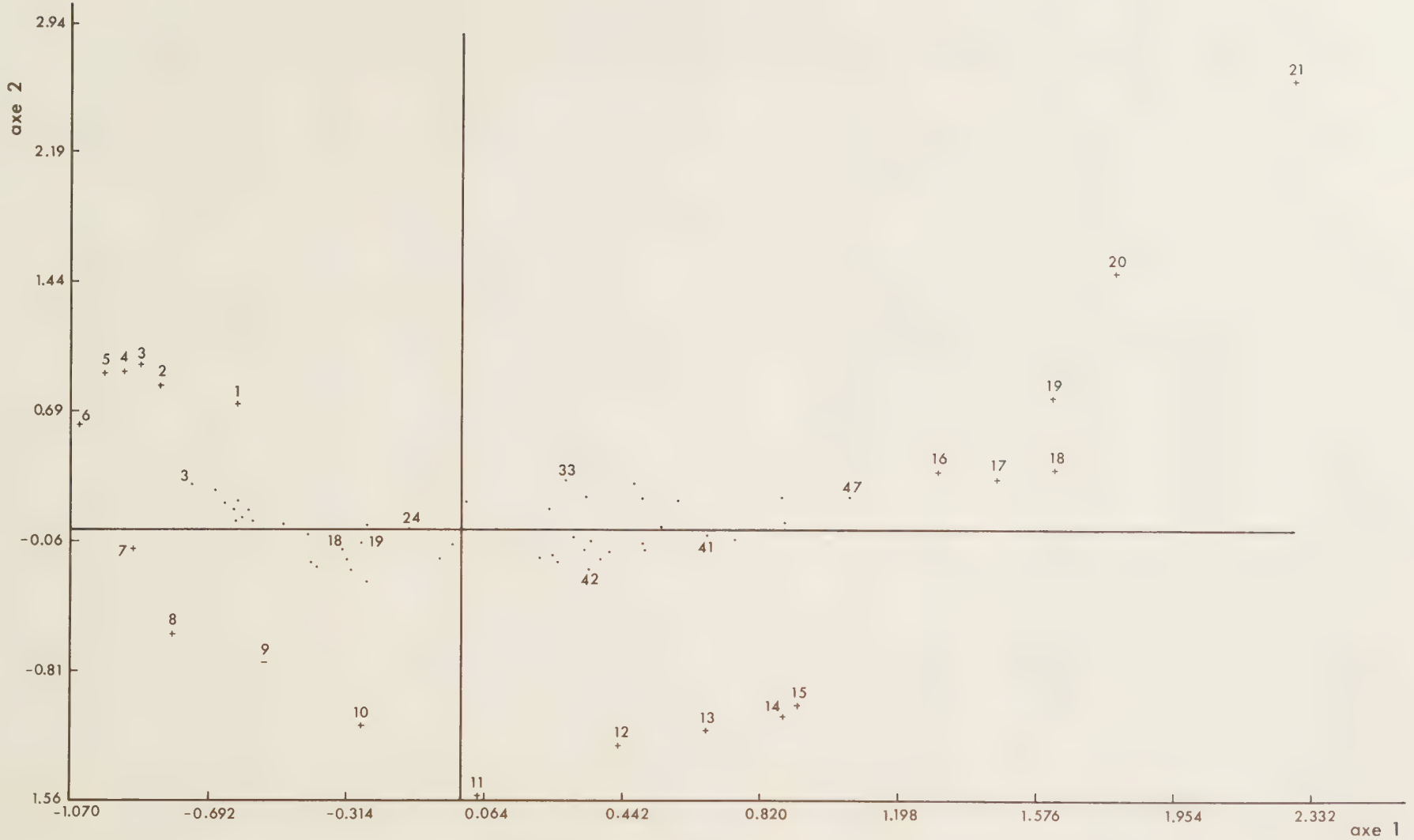


Figure. 4_8 : Représentation des individus (·) et des caractères (+) - Espaces médullaires

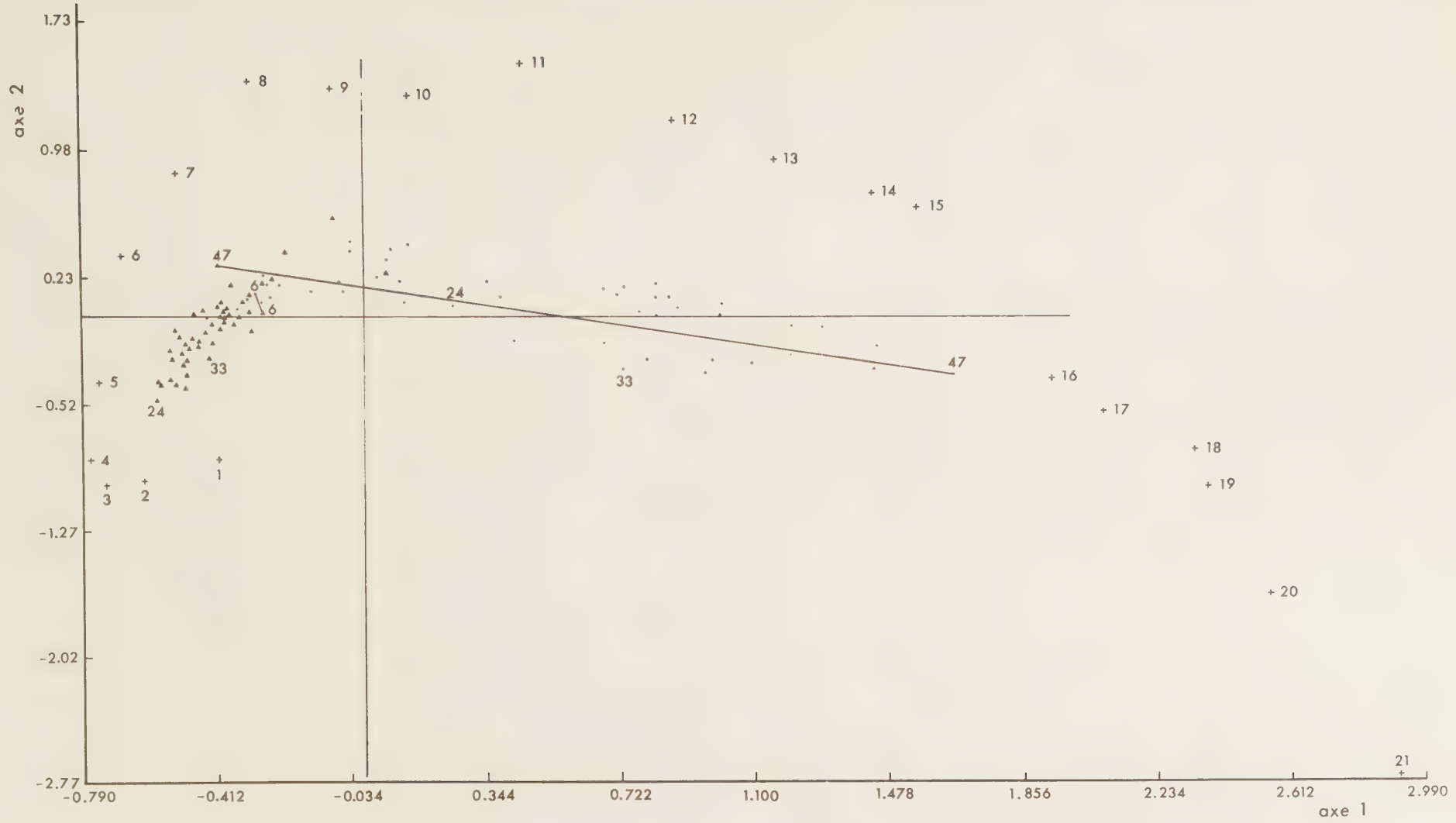


Figure.4_9: Représentation des individus (▲ Travées, · Espaces) et des caractères (+)

Tableau 4 - 3

	Valeurs propres	Contribution à l'inertie	Contribution cumulée
Travées osseuses	0,0758 0,0217 0,0090	0,5482 0,1573 0,0654	0,5482 0,7055 0,7709
Espaces médullaires	0,2456 0,0235 0,0131	0,7499 0,0718 0,0402	0,7499 0,8217 0,8619
Ensemble travée - espace	0,3446 0,0482 0,0260	0,7379 0,1032 0,0558	0,7379 0,8411 0,8969

Les valeurs propres, dans le cas des travées osseuses, sont toutes très petites. Cela traduit la relative indépendance entre la "variable individu" et la "variable caractère". Le χ^2 de contingence n'est pas significatif.

Par contre, pour les espaces médullaires et l'ensemble "travée - espace", la première valeur propre, qui n'est autre que le coefficient de corrélation canonique entre les deux paquets de variables indicatrices associés aux deux caractères qualitatifs, est assez grande. Ceux-ci sont relativement dépendants.

Dans ces deux cas, seule la part d'inertie associée à la première valeur propre est très grande.

La comparaison des tableaux 4-2 et 4-3 montre la similitude des résultats de l'analyse en composantes principales et de l'analyse factorielle des correspondances, les parts d'inertie expliquée par le premier axe et par le premier plan étant plus grandes dans le cas de l'analyse factorielle de correspondance.

4 - 2-2.2 Description des individus et des caractères

La représentation simultanée des "variables individu" et des "variables caractère" dans le plan des deux premiers axes est donnée :

- dans la figure 4-7 pour les travées osseuses ;
- dans la figure 4-8 pour les espaces médullaires ;
- dans la figure 4-9 pour l'ensemble "travée-espace".

Comme pour l'analyse en composantes principales, on constate une opposition entre les petites longueurs de corde (caractères 1 à 8) et les grandes longueurs de corde (caractères 14 à 21) suivant le premier axe.

Pour les travées osseuses, tous les individus sont regroupés autour de l'origine dans le plan des deux premiers axes.

Pour les espaces médullaires, dans le plan des deux premiers axes, les individus sont regroupés autour et le long du premier axe, et les individus les plus jeunes sont opposés aux plus vieux.

Pour l'ensemble "travée-espace", dans le plan des deux premiers axes, les nuages de points représentant les "individus travées" et les "individus espaces" sont séparés sauf pour les enfants de moins de 1 mois. La distance séparant les points représentatifs d'un même individu, travées et espaces, croît avec son âge.

4 - 2-3 Comparaison des résultats obtenus en analyse en composantes principales et en analyse factorielle des correspondances

On a pu constater déjà l'analogie des résultats obtenus en analyse en composantes principales avec ceux obtenus en analyse factorielle des correspondances.

Pour les espaces médullaires, les classements suivant la première composante principale et suivant le premier facteur (Tableau 4-4) sont très proches l'un de l'autre. Le numéro d'ordre de chaque individu correspond à son rang dans le classement par âge croissant de l'échantillon. Les individus sont rangés par valeurs décroissantes de la première composante principale et par valeurs croissantes du premier facteur.

Cette analogie s'explique par le fait que :

- d'une part on utilise les fréquences relatives ; ce qui conduit à affecter le même poids à chaque "individu" ;

- d'autre part, on a choisi un découpage en classe tel que chaque "caractère" soit à peu près équiprobable.

Tableau 4 - 4

Classement des individus suivant la première composante principale et suivant le premier facteur en analyse de correspondance pour les espaces médullaires Le numéro d'ordre de chaque individu correspond à son rang dans lè classement par âge croissant de l'échantillon.

Première composante principale	Premier facteur	Première composante principale	Premier facteur
3	3	35	31
8	8	32	33
1	1	31	37
6	6	29	29
5	12	37	32
12	5	27	42
21	21	34	27
17	17	42	39
7	7	39	40
10	10	36	34
11	11	40	36
23	9	38	38
13	13	44	44
9	23	45	45
4	4	41	41
16	18	46	46
18	16	30	30
14	14	43	43
19	19	47	47
15	2		
2	15		
24	24		
22	22		
20	25		
25	20		
28	26		
33	28		
26	35		

En effet, dans ces conditions, il est à peu près équivalent de munir :

- l'ensemble des individus de la métrique euclidienne D_{1/σ^2} en analyse en composantes principales ;

- le simplexe des lois de probabilité sur I x J de la distance du χ^2 de centre p, où p est une loi de probabilité uniforme sur I x J.

4 - 3 CONCLUSION

L'analyse en composantes principales et l'analyse factorielle des correspondances ont mis en évidence :

- la relative homogénéité des histogrammes de fréquences des longueurs de corde de travées osseuses ;

- la proximité, à la naissance, des histogrammes relatifs aux travées osseuses et aux espaces médullaires d'un même individu, et leur éloignement croissant avec l'âge ;

- la déformation, avec l'âge, de l'individu des histogrammes de fréquences des longueurs de corde d'espaces médullaires.

On peut donc considérer :

- que les déformations des histogrammes relatifs aux travées osseuses résultent de fluctuations statistiques autour d'un "histogramme moyen" ;

- qu'à un individu d'âge donné on peut associer une forme d'histogramme de fréquences des longueurs de corde d'espaces médullaires.

Les petites longueurs de corde d'espaces médullaires, seront les plus nombreuses chez l'enfant de moins de trois mois, et les grandes longueurs de corde le seront chez les individus les plus âgés.

C H A P I T R E V

RECHERCHE D'UN MODELE PROBABILISTE

5 - 1 INTRODUCTION

On a vu précédemment une description des histogrammes associés aux longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires, à l'aide des techniques d'analyse de données ; aucune hypothèse de loi n'a été faite quant à leurs distributions aux différents âges.

Dans ce chapitre, en vue de proposer aux médecins un modèle d'organisation de l'os et son évolution avec l'âge, on choisit, compte tenu de l'examen des histogrammes et de l'analyse de données, une distribution composite pour représenter les longueurs de cordes d'espaces médullaires.

Le modèle étant choisi, il s'agit d'en déterminer les paramètres pour les différents âges ; la qualité du modèle et de l'ajustement pourra être mesurée en comparant les proximités entre individus définis à partir des constantes du modèle et celles obtenues par les techniques d'analyse de données.

Le chapitre comporte deux parties :

- dans la première, une technique générale d'ajustement par tirage au hasard est présentée ;

- dans la seconde, on applique, après avoir présenté le modèle, la technique précédente pour en déterminer les paramètres.

5 - 2 PREMIERE PARTIE

5 - 2-1 Introduction

Choisir un modèle permettant de préciser la forme du lien existant entre deux variables x et y, revient à considérer une famille $\mathcal{F}$ de fonctions de R dans R.

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R \\ x & f \in \mathcal{F} & y = f(x) \end{array}$$

L'expérimentation fournit, pour un nombre fini de valeurs de la variable x : $(x_i,\ i = 1,\ n)$, les valeurs correspondantes de la variable y : $(y_i,\ i = 1,n)$.

A chaque élément f de $\mathcal{F}$ on peut associer un point de R^n

$$f \in \mathcal{F} \longrightarrow \underline{f} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \underline{e_i}$$

Ajuster le modèle aux résultats expérimentaux revient à choisir dans R^n le vecteur $\underline{f}$ le plus proche du vecteur $\underline{y}$.

Le choix de la proximité ou plutôt de la dissimilarité est lié à la nature du modèle posé :

si le modèle est linéaire, il est logique de choisir une distance euclidienne sur R^n ; la solution est alors très simple, l'ensemble des fonctions f étant identique à un sous-espace vectoriel de R^n: on obtient la solution f en projetant y, au sens de la métrique euclidienne choisie, orthogonalement sur le sous-espace vectoriel (régression).

On peut aussi utiliser comme distance sur R^n, une distance du type :

$$d(\underline{f}, \underline{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - y_i |^{\mu} \right]^{\frac{1}{\mu}}$$

La distance euclidienne classique est un cas particulier $(\mu = 2)$ de cette famille de distances.

Dans notre cas, il s'agit d'ajuster des lois de probabilités empiriques. Il est normal de penser, R^n étant assimilé à l'ensemble des mesures sur un ensemble fini de cardinal n, à munir le simplexe S des lois de probabilité dans R^n de la "distance du χ^2".

La solution f étant inconnue a priori, on ne peut centrer le χ^2 en f ; comme notre problème n'est pas de contrôler si la loi empitique peut être considérée comme une déformation d'une loi théorique f, mais simplement de chercher la loi de probabilité f de la famille $\mathcal{F}$ la plus proche de la loi empirique y, il ne semble pas aberrant de prendre pour distance du χ^2 celle de centre y.

L'indice de dissimilarité étant choisi dans R^n, il s'agit alors de définir une méthode permettant de trouver le point $\underline{f}$ de R^n le plus proche du vecteur $\underline{y}$.

On sort en général des problèmes d'analyse linéaire car :

- les solutions possibles n'engendrent pas en général un sous-espace vectoriel ;

- la métrique utilisée n'est pas euclidienne.

Ce type de problème est fréquent en analyse numérique; la méthode la plus classique utilisée est la méthode du gradient. Nous développerons, dans le paragraphe suivant, la méthode dite de BAZIN (2) qui procède par tirage au hasard avec modification pas à pas de la loi de tirage.

5 - 2-2 Principe général

A la famille $\mathcal{F}$ est associé un ensemble de paramètres dont l'ensemble des valeurs est Ω .

A tout point ω de Ω correspond une fonction f de $\mathcal{F}$ et un point $\underline{f}$ de R^n

$$\omega \in \Omega \longrightarrow f \in \mathcal{F} \longrightarrow \underline{f} \in R^n$$

Ω peut être assimilé à R^p s'il y a p paramètres.
L'application qui fait correspondre à ω , élément de Ω , le point $\underline{f}$ de R^n, n'est linéaire que si le "modèle" est linéaire.

R^n étant muni d'un indice de dissimilarité d, en général une distance, à chaque ω de Ω correspond une valeur de l'indice de dissimilarité

$$\omega \longrightarrow d (\underline{f}, \underline{y}) = \delta(\omega)$$

La solution cherchée correspond à $d(\underline{f}, \underline{y})$ minimum.
Les valeurs de $\delta (\omega)$ ne sont pas connues ; il s'agit donc d'explorer l'espace Ω pour trouver le minimum de la fonction $\delta(\omega)$, de la manière la moins coûteuse possible.

On suppose que Ω est un pavé de R^p, défini par l'ensemble des valeurs limites supérieures et inférieures possibles des paramètres considérés.

La technique de BAZIN consiste :

- à effectuer, à l'étape j, un tirage au hasard dans le pavé Ω suivant une loi de probabilité définie à l'étape (j-1),

puis ceci étant réalisé

- à comparer la valeur de $\delta(\omega)$ obtenue à une valeur de référence δ_o ($\delta_o > 0$) ;

- à déformer la loi de tirage en fonction du résultat obtenu avant de passer à l'étape suivante, de façon à augmenter la probabilité du tirage des points ω de Ω conduisant aux petites valeurs de $\delta(\omega)$:

$$\delta(\omega) \leq \delta_o$$

On a beaucoup de chance ainsi d'augmenter la probabilité de passer par la valeur cherchée au cours des tirages au hasard.

5 -2-3 La méthode en détail

5 -2-3-1 Définition de l'épreuve

Ω est un pavé de R^p et $\underline{\omega}$ est un vecteur de R^p

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_p \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_p \subset R^p$$

Soit I un ensemble fini d'indices. Pour chaque paramètre k, on réalise une partition de l'intervalle Ω_k.

$$\Omega_k = \bigcup_{i \in I} \Omega_{ki}$$

$$\Omega_{ki'} \cap \Omega_{ki} = \emptyset \quad \text{quel que soit } i' \neq i$$

Ces partitions induisent une partition de Ω dont les éléments sont les pavés :

$$\Omega_{i_1, \ldots, i_p} = \Omega_{1i_1} \times \ldots \times \Omega_{pi_p} \quad (i_1, \ldots, i_p) \in I_1 \times \ldots I_p = I^p$$

A priori, toutes les valeurs de ω de Ω peuvent être la solution cherchée, aussi est-il logique de choisir, initialement, une loi de tirage uniforme sur Ω .

Le tirage au hasard comporte deux stades à l'étape j :

- le premier stade donne le pavé $\Omega i_1 \ldots i_p$ en tirant les indices $i_1, \ldots, i_p$ suivant les "lois marginales" :

$$P^j_{I_1}(i_1) = \text{Proba } (\omega_1 \in \Omega_{1 i_1}) \qquad i_1 \in I_1$$

.....

$$P^j_{I_p}(i_p) = \text{Proba } (\omega_p \in \Omega_{p i_p}) \; ; \; i_p \in I_p$$

à la première étape on a :

$$P^1_{I_k}(i) = P^1_{I_k}(i') \quad \text{quels que soient } i \text{ et } i' \text{ dans } I_k$$

et quel que soit k ;

- le second stade donne la valeur de ω obtenue en tirant au hasard les valeurs de ses composantes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ suivant des lois uniformes respectivement sur $\Omega_{1 i_1}, \ldots, \Omega_{p i_p}$

La valeur de l'indice de dissimilarité $\delta(\omega)$ étant obtenue et la valeur de référence δ_o étant donnée a priori, le résultat de l'épreuve sera :

- un succès si $\delta(\omega) \leq \delta_o$
- un échec si $\delta(\omega) > \delta_o$

5 -2-3-2 Lois de probabilité associées à l'épreuve à l'étape j

A l'étape j, on est amené à considérer pour chaque paramètre k :

- la loi de probabilité marginale $P^j_{I_k}(i)$ de tirer l'indice i de l'intervalle Ω_{ki} contenu dans Ω_k :

$$P^j_{I_k}(i) = \text{Proba } (\omega_k \in \Omega_{ki}) \; ; \; i \in I_k$$

$$\sum_{i \in I_k} P^j_{I_k}(i) = 1$$

- la probabilité de "succès" sachant qu'on a tiré l'indice i de I_k :

$$P^j_{S/I_k}(i) = \text{Proba}\ (\delta(\omega) \leq \delta_o / \omega_k \in \Omega_{ki}) \quad ; \quad i \in I_k$$

- la probabilité de tirer l'indice i de I_k en ayant un succès :

$$P^j_{I_k S}(i) = P^j_{I_k}(i) \cdot P^j_{S/I_k}(i) \quad ; \quad i \in I_k$$

- la probabilité de succès dans Ω :

$$P^j_S = \text{Proba}\ (\delta(\omega) \leq \delta_o, \omega \in \Omega) = \sum_{i \in I_k} P^j_{I_k S}(i)$$

- la probabilité de tirer l'indice i de I_k sachant qu'on a un succès :

$$P^j_{I_k/S}(i) = \text{Proba}\ (\omega_k \in \Omega_{ki} / \delta(\omega) \leq \delta_o) = \frac{P^j_{I_k S}(i)}{P^j_S}$$

Pour obtenir les lois de probabilités analogues relatives aux échecs, il suffit de remplacer le symbole S (succès) par le symbole E (échec).

Connaissant ces lois de probabilités, on pourra définir la loi de tirage à l'étape (j+1).

A l'étape (j+1), on prend comme loi de tirage sur I_k (k = 1, p) la loi de probabilité de tirage sachant que l'on a un succès, obtenue à l'étape j ; on choisit ainsi une nouvelle mesure de probabilité sur Ω "favorisant" les succès.

$$P^{j+1}_{I_1}(i) = P^j_{I_1/S}(i) \qquad i \in I_1$$

.....

$$P^{j+1}_{I_p}(i) = P^j_{I_p/S}(i) \qquad i \in I_p$$

5 - 2-4 Déformation de la loi de tirage

5 - 2-4-1 Cas d'un seul paramètre

A la fin de l'étape j, on peut construire le tableau suivant :

indice	1 .... i	
succès	$P_{IS}^{j}(1)$ .... $P_{IS}^{j}(i)$	P_{S}^{j}
échec	$P_{IE}^{j}(1)$ .... $P_{IE}^{j}(i)$	P_{E}^{j}
	$P_{I}^{j}(1)$ .... $P_{I}^{j}(i)$	1

où $P_{IS}^{j}(i)$ est la probabilité de tirer l'indice i de I en ayant un succès à l'étape j,

$P_{IE}^{j}(i)$ est la probabilité de tirer l'indice i de I en ayant un échec à l'étape j,

$P_{I}^{j}(i)$ est la probabilité de tirer l'indice i de I à l'étape j,

P_{S}^{j} et P_{E}^{j} sont respectivement les probabilités de succès et d'échec à l'étape j,

On en déduit les tableaux :

indice	1 .... i ....
succès	$P_{S/I}(1)$ .... $P_{S/I}(i)$ ....
échec	$P_{E/I}(1)$ .... $P_{E/I}(i)$ ....
	1 ..... 1 .....

où :

$P_{S/I}^{j}(i)$ est la probabilité de succès sachant qu'on a tiré l'indice i de I à l'étape j,

$P_{E/I}^{j}(i)$ est la probabilité d'échec sachant qu'on a tiré l'indice i de I à l'étape j,

et

indice	1 ..... i	
succès	$P^j_{I/S}(1)$ ....$P^j_{I/S}(i)$	1
échec	$P^j_{I/E}(1)$ ....$P^j_{I/E}(i)$	1

où :

$P^j_{I/S}(i)$ est la probabilité de tirer l'indice i de I, sachant que l'on a un succès à l'étape j,

$P^j_{I/E}(i)$ est la probabilité de tirer l'indice i de I, sachant que l'on a un échec à l'étape j.

A l'étape (j+1), on prend comme loi de tirage la loi $P^j_{I/S}(i)$, $i \in I$ de tirage sachant que l'on a un succès.

Le tableau des probabilités de succès, respectivement d'échec, sachant que l'on a tiré l'indice i, dépend uniquement de la valeur δ_o de référence choisie initialement ; à δ_o fixé la modification des lois de tirage, aux différentes étapes, laisse, théoriquement , invariant ce tableau.

Si les hypothèses :

1 - Il existe au moins un indice i_o de I tel que, quel que soit $i \in I$, $i \neq I_o$

$$P_{S/I}(i_o) > P_{S/I}(i)$$

2 - $\delta(\omega)$ minimum correspond à $P_{S/I}(i_o)$ maximum ; il est simple de montrer que le processus est "théoriquement convergent" :

$$\lim_{j \to \infty} \left(P^j_{I/S}(i_o) \right) = 1$$

Ces hypothèses, si le minimum $\delta(\omega)$ est réalisé pour une seule valeur de ω, sont toujours vérifiées pour des valeurs δ_o du seuil bien choisies.

Voici, brièvement, les propriétés essentielles qui permettent de se rendre compte de la véracité de ce qui précède et surtout, de réfléchir aux qualités et aux faiblesses du processus construit pour chercher le point ω rendant minimale la fonction. En particulier, les propriétés 6 et 7 sont importantes et font apparaître les qualités [6] et les faiblesses [7] du

processus. Ces propriétés, qui ne font intervenir que des probabilités théoriques, ne sont pas suffisantes pour affirmer dans la réalité la qualité du processus. Quand on estimera les probabilités en fonction des fréquences de succès, il faudra tenir compte de la précision de ces estimations ; compte-tenu de celle-ci et de la propriété 7, il est évident que le processus est dangereux si les $P_{S/I}(i)$ sont voisines. Or, on possède un moyen, en jouant sur le seuil δ_o d'accroître la dispersion des $P_{S/I}(i)$ et ainsi de rendre le processus moins dangereux.

Propriété 1 -

La loi de tirage à l'étape (j + 1) se déduit de celle à l'étape j de la manière suivante :

$$P_I^{j+1}(i) = P_{I/S}^{j}(i) = P_I^j(i) \frac{P_{S/I}(i)}{P_S^j} \qquad i \in I$$

où P_S^j est l'"espérance mathématique" des $P_{S/I}(i)$, $i \in I$, à l'étape j :

$$P_S^j = \sum_{i \in I} P_I^j(i) \; P_{S/I}(i)$$

Soient K_1^j et K_2^j les éléments de la partition de l'ensemble I, à l'étape j, tels que :

$$i \in K_1^j \Longrightarrow P_{S/I}(i) \geqslant P_S^j$$

$$i \in K_2^j \Longrightarrow P_{S/I}(i) < P_S^j$$

Propriété 2 -

$$\left.\begin{array}{l} P_{S/I}(i) \geqslant P_S^j \Longrightarrow P_I^{j+1}(i) \geqslant P_I^j(i) \\ \text{et } P_{S/I}(i) < P_S^j \Longrightarrow P_I^{j+1}(i) < P_I^j(i) \end{array}\right\} \Longrightarrow P_S^{j+1} \geqslant P_S^j$$

Propriété 3 -

$$\lim_{j \to \infty} P_S^j = P_{S/I}(i_o)$$

Propriété 4 -

$$\left.\begin{array}{l} P_{S/I}(i_o) > P_{S/I}(i) \\ \text{quel que soit } i \neq i_o \text{ dans } I \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} i_o \in K_1^j \\ \text{quelle que soit l'étape } j. \end{array}\right.$$

Propriété 5 -

$$P_S^{j+1} > P_S^j \Longrightarrow K_1^{j+1} \subset K_1^j$$

Les ensembles K_1^j obtenus au cours des étapes sont donc emboités.

Propriété 6 -

$$i \in \bigcap_j K_1^j \Longrightarrow P_I^{j+1}(i) > P_I^j(i) \quad \text{quel que soit } j.$$

et en particulier :

$$i_o \in \bigcap_j K_1^j \Longrightarrow P_I^{j+1}(i_o) > P_I^j(i_o) \quad \text{quel que soit } j.$$

Propriété 7 -

$$i \in \bigcup_j K_2^j \Longrightarrow \lim_{j \to \infty} P_I^j(i) = 0$$

Propriété 8 -

S'il existe i_o de I tel que $P_{S/I}(i_o) > P_{S/I}(i)$ quel que soit i de I, $i \neq i_o$, alors :

$$\lim_{j \to \infty} P_I^j(i_o) = 1$$

Les ensembles K_1^j, obtenus au cours des étapes successives sont emboités.

$$K_1^1 \supset K_1^2 \supset \ldots\ldots \supset K_1^j \supset \ldots\ldots$$

Soit $K_1 = \lim_{j \to \infty} \bigcap_j K_1^j$

Si card $(K_1) = 1$ alors $\{i_o\} = K_1$.

5 -2-4-2 Cas de deux paramètres - cas général

A la fin de l'étape j, on peut construire le tableau à trois entrées $(I_1 \times I_2 \times \{$ succès, échec $\})$ des $P^j_{I_1 I_2 S}(i_1, i_2)$ et $P^j_{I_1 I_2 E}(i_1, i_2)$: Probabilités de tirer le couple (i_1, i_2) de $I_1 \times I_2$ et d'avoir un succès, respectivement un échec.

Les tableaux marginaux sont :

- les probabilités de tirer i_k de I_k, $k = 1, 2$, et d'avoir un succès, respectivement un échec.

	I_k	
	..... i_k	
succès	..... $P^j_{I_k S}(i_k)$	P^j_S
échec	..... $P^j_{I_k E}(i_k)$	P^j_E
	..... $P^j_{I_k}(i_k)$	1

$k = 1, 2$

- les probabilités de tirer (i_1, i_2) dans $I_1 \times I_2$

	I_1	
	..... i_1	
I_2 i_2	..... $P^j_{I_1 I_2}(i_1, i_2)$...	$P^j_{I_2}(i_2)$
	..... $P^j_{I_1}(i_1)$	1

avec $P^j_{I_1 I_2}(i_1, i_2) = P^j_{I_1}(i_1) \cdot P^j_{I_2}(i_2)$

(dans le processus , on se donne les lois marginales

$\left\{ P^j_{I_1}(i_1) \ , \ i_1 \in I_1 \right\}$ et $\left\{ P^j_{I_2}(i_2), \ i_2 \in I_2 \right\}$)

Comme dans le cas d'un seul paramètre on peut en déduire les tableaux à trois entrées :

- des probabilités de succès, respectivement d'échec, sachant que l'on a tiré le couple (i_1, i_2) dans $I_1 \times I_2$.

$$\left.\begin{array}{l} P_{S/I_1I_2}(i_1, i_2) \\ P_{E/I_1I_2}(i_1, i_2) \end{array}\right\} \quad (i_1, i_2) \in I_1 \times I_2$$

Ce tableau est invariant, au cours des étapes j, et ne dépend que du choix de la valeur de référence δ_o de l'indice de dissimilarité;

- des probabilités de tirer le couple (i_1, i_2) de $I_1 \times I_2$ sachant que l'on a un succès, respectivement un échec

$$\left.\begin{array}{l} P^j_{I_1I_2/S}(i_1, i_2) \\ P^j_{I_1I_2/E}(i_1, i_2) \end{array}\right\} (i_1, i_2) \in I_1 \times I_2$$

Pour chaque paramètre, on a les tableaux suivants :

	I_k
	..... i_k .....
succès	..... $P^j_{S/I_k}(i_k)$ .....
échec	..... $P^j_{E/I_k}(i_k)$ .....
	..... 1 .....

$k = 1, 2$

et

	I_k	
	..... i_k	
succès	..... $P^j_{I_k/S}(i_k)$	1
échec	..... $P^j_{I_k/E}(i_k)$	1

$k = 1, 2$

où :

$$- P^j_{S/I_1}(i_1) = \sum_{i_2 \in I_2} P^j_{I_2}(i_2)\ P_{S/I_1 I_2}(i_1, i_2)$$

$$- P^j_{E/I}(i_1) = \sum_{i_2 \in I_2} P^j_{I_2}(i_2)\ P_{E/I_1 I_2}(i_1, i_2)$$

$$- P^j_S = \sum_{i_k \in I_k} P^j_{I_k}(i_k)\ P^j_{S/I_k}(i_k) \qquad k = 1, 2$$

$$\boxed{- P^j_{I_k/S}(i_k) = P^j_{I_k}(i_k)\ \frac{P^j_{S/I_k}(i_k)}{P^j_S} \qquad k = 1, 2}$$

$$- P^j_{I_k/E}(i_k) = P^j_{I_k}(i_k)\ \frac{P^j_{E/I_k}(i_k)}{P^j_E}$$

$$= P^j_{I_k}(i_k)\ \frac{1 - P^j_{S/I_k}(i_k)}{1 - P^j_S} \qquad k = 1, 2$$

La probabilité de succès, sachant que l'on a tiré pour l'un des paramètres l'indice i_1 de I_1, varie au cours des étapes j ; elle dépend de la loi de tirage de l'autre paramètre.

On prendra pour lois de tirage des paramètres à l'étape $(j + 1)$

$$\boxed{P^{j+1}_{I_k}(i_k) = P^j_{I_k/S}(i_k) = P^j_{I_k}(i_k)\ \frac{P^j_{S/I_k}(i_k)}{P^j_S},\ i_k \in I_k,\ k = 1, 2.}$$

Comme dans le cas d'un seul paramètre, s'il existe un couple (i'_1, i'_2) de $I_1 \times I_2$ tel que :

$$P_{S/I_1 I_2}(i'_1, i'_2) > P_{S/I_1 I_2}(i_1, i_2)$$

$$P_{S/I_1}(i'_1) > P_{S/I_1}(i_1) \qquad \text{(quelle que soit la loi } P_{I_2})$$

$$P_{S/I_2}(i'_2) > P_{S/I_2}(i_2) \qquad \text{(quelle que soit la loi } P_{I_1})$$

quel que soit le couple $(i_1, i_2) \neq (i'_1, i'_2)$ dans $I_1 \times I_2$, alors théoriquement :

$$\lim_{j \to \infty} P^j_{I_1}(i'_1) = \lim_{j \to \infty} P^j_{I_2}(i'_2) = \lim_{j \to \infty} P^j_{I_1 I_2}(i'_1, i'_2) = 1$$

et P^j_S, $P^j_{S/I_1}(i'_1)$, $P^j_{S/I_2}(i'_2)$ sont des suites croissantes de j dont la

limite est :

$$\lim_{j\to\infty} P_S^j = \lim_{j\to\infty} P^j_{S/I_k}(i'_k) = P_{S/I_1I_2}(i'_1, i'_2) \qquad k = 1, 2.$$

Le cas de deux paramètres est donc peu différent du cas d'un seul paramètre : la seule différence réside dans le fait que pour des raisons de commodité on tire au hasard à l'étape $(j + 1)$, non pas dans la loi

$$\left\{ P^j_{I_1I_2/S}(i_1, i_2) \;/\; (i_1, i_2) \in I_1 \times I_2 \right\}$$

mais dans la loi

$$\left\{ P^j_{I_1/S}(i_1) \times P^j_{I_2/S}(i_2) \;/\; (i_1, i_2) \in I_1 \times I_2 \right\}$$

La généralisation au cas de p paramètres se fait aisément.

S'il existe $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_p)$ de $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p$ tel que

$$P_{S/I_1 \times \ldots \times I_p}(i'_1, \ldots, i'_p) > P_{S/I_1 \times \ldots \times I_p}(i_1, \ldots, i_p)$$

$$P_{S/I_k}(i'_k) > P_{S/I_k}(i_k) \qquad k = 1, p$$

quel que soit

$$(i_1, \ldots, i_p) \neq (i'_1, \ldots, i'_p) \text{ dans } I_1 \times \ldots \times I_p$$

alors, théoriquement :

$$\lim_{j\to\infty} P^j_{I_k}(i'_k) = \lim_{j\to\infty} P_{I_1 \times \ldots \times I_k}(i'_1, \ldots, i'_p) = 1$$

et P_S^j, $P^j_{S/I_k}(i'_k)$, $k = 1, p$ sont des suites croissantes de j dont la limite est :

$$\lim_{j\to\infty} P_S^j = \lim_{j\to\infty} P^j_{S/I_k}(i'_k) = P_{S/I_1 \times \ldots \times I_p}(i'_1, \ldots, i'_p) \qquad k = 1, p.$$

5 - 2-4-3 - Exemples

Pour illustrer le processus décrit ci-dessus, on a traité quelques exemples, en supposant connue la variation de l'indice de dissimilarité et en se donnant des valeurs de référence δ_o.

Exemple 1 - La fonction $\delta(\omega)$ (figure 5-1) est une fonction du second degré d'un seul paramètre.

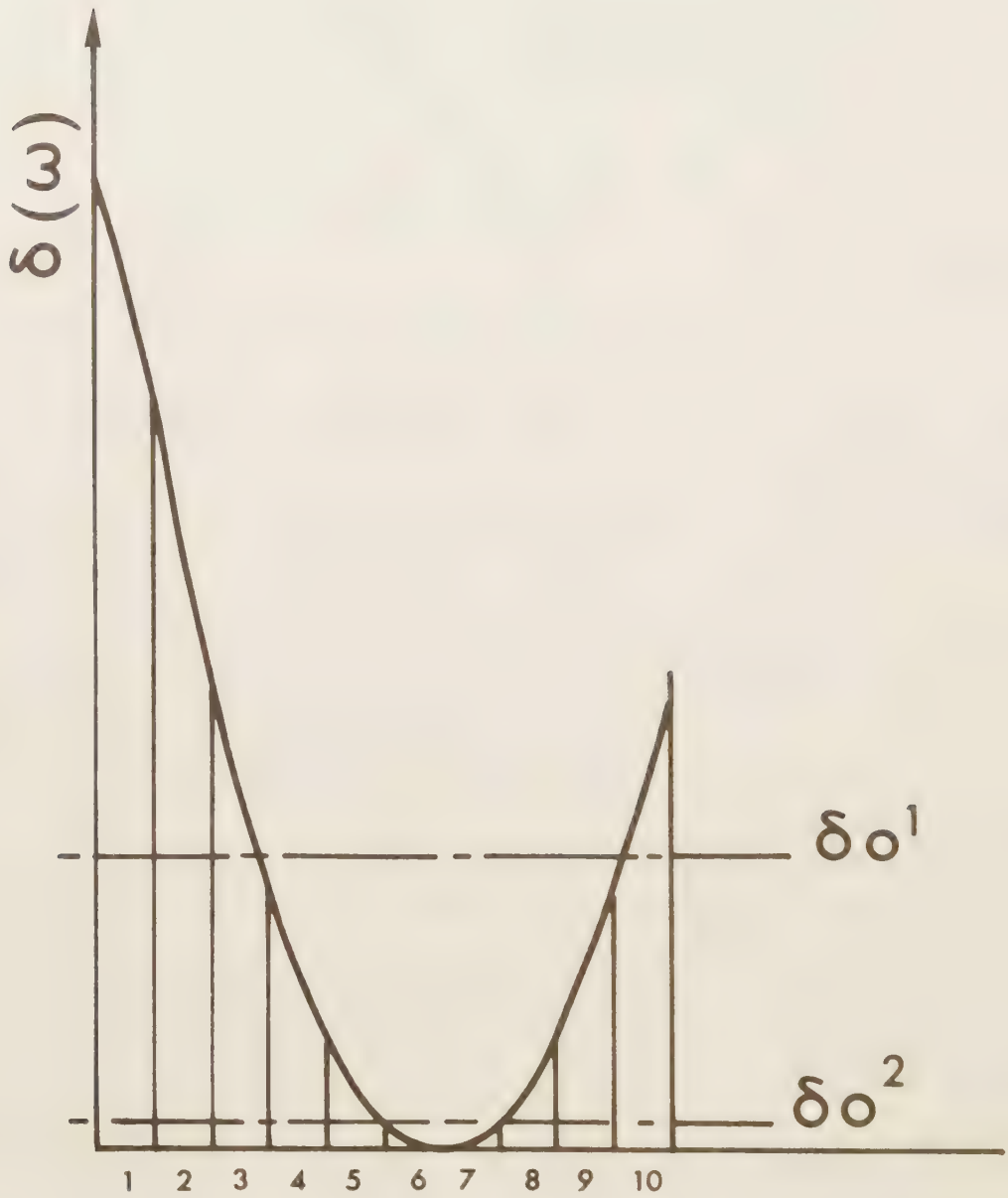


Figure . 5_1

Pour la valeur de référence δ_o^1 on a :

- le tableau des probabilités de succès sachant que l'on a tiré l'indice i de I :

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{S/I}(i)$	0	0	1/4	1	1	1	1	1	1	1/4

- les lois de tirages au cours des étapes :

Etapes j	P_S^j	$P_I^j(i)$			
		i = 1,2	i = 3	i = 4 à 9	i = 10
1	0,650	0,10	0,10	0,10	0,10
2	0,927	0	0,038	0,153	0,038
3	0,995	0	0,010	0,165	0,010
4	0,999	0	0,010	0,166	0,010

Pour la valeur de référence δ_o^2 on a les tableaux :

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{S/I}(i)$	0	0	0	0	0	3/4	3/4	0	0	0

et

Etapes j	P_S^j	$P_I^j(i)$		
		i = 1 à 5	i = 6 et 7	i = 8 à 10
1	0,15	0,1	0,1	0,1
2	0,75	0	0,5	0

Exemple 2 - La fonction $\delta(\omega_1, \omega_2)$ de deux paramètres et le choix de δ_o conduit au tableau des probabilités de succès sachant que l'on a tiré le couple (i_1, i_2) dans $I_1 \times I_2$: $P_{S/I_1 I_2}(i_1, i_2)$.

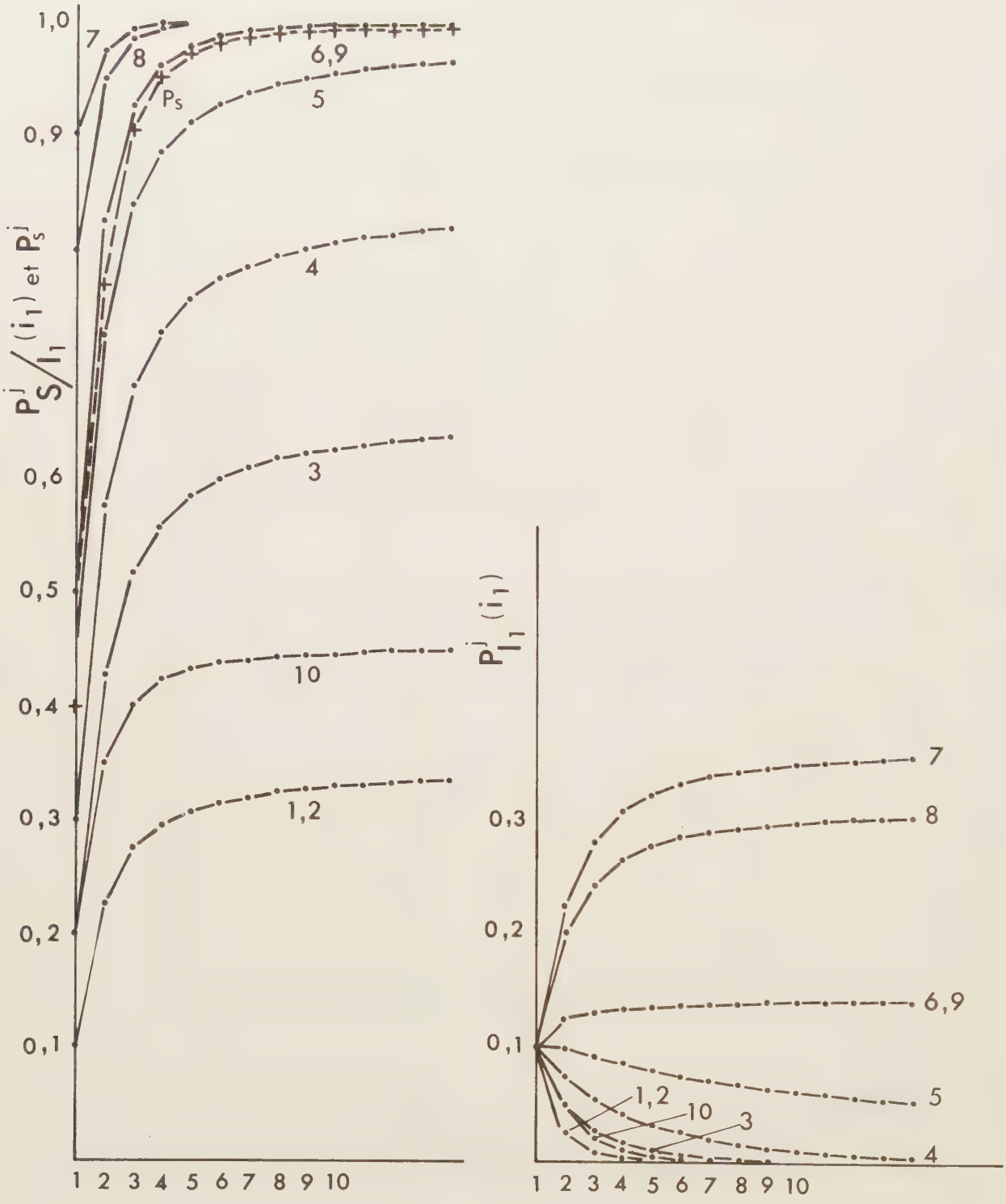


Figure . 5 _ 2 : Probabilités associées à l'épreuve (k = 1)

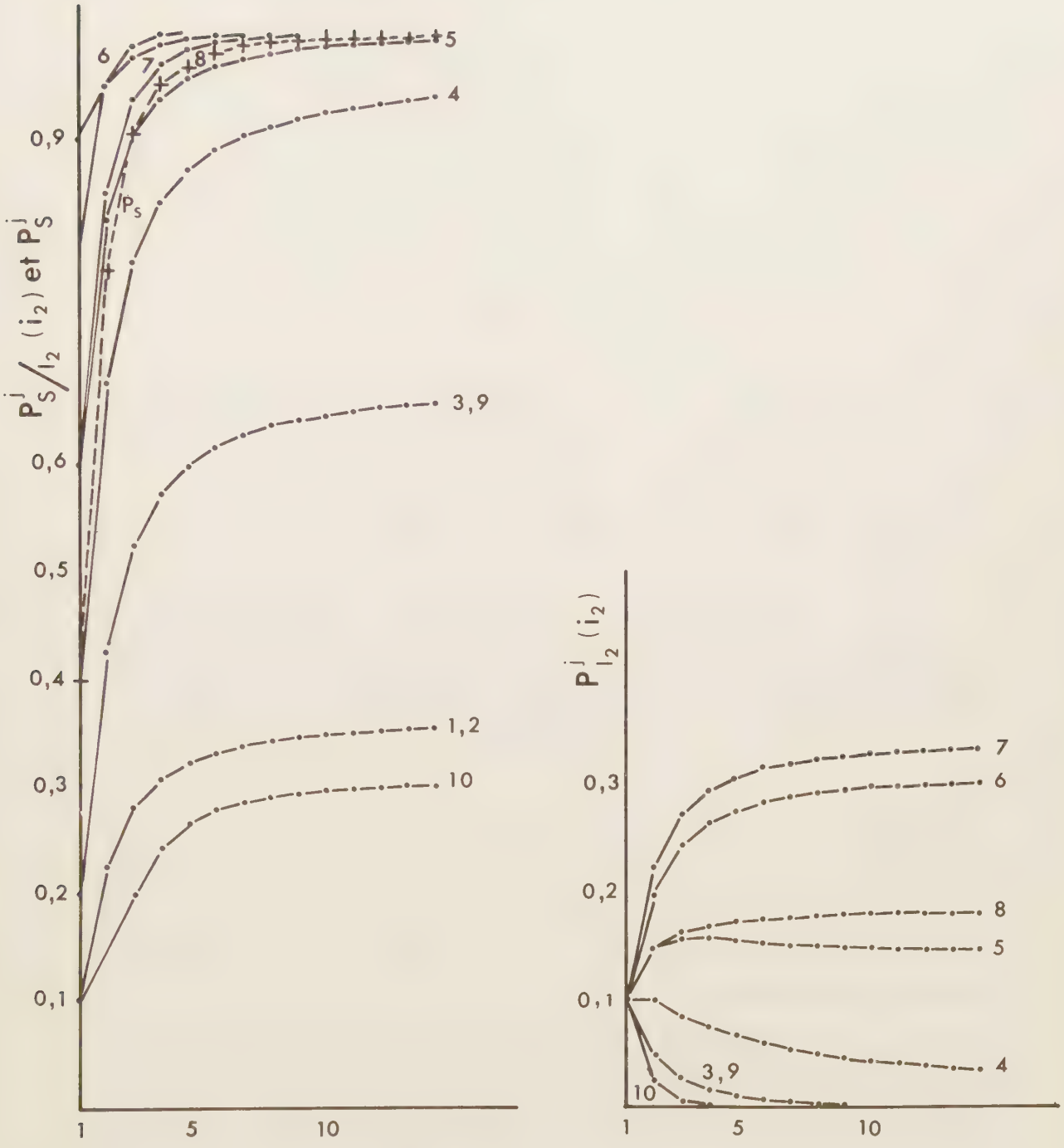


Figure . 5 _ 3 : Probabilités associées à l'épreuve (k = 2)

I_2 \ I_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

L'évolution au cours des étapes j, des probabilités de succès : P_S^j, des probabilités de succès sachant que l'on a tiré i_k dans I_k : $P^j_{S/I_k}(i_k)$ et des probabilités de tirer i_k dans I_k : $P^j_{I_k}(i_k)$, est présentée dans la figure 5-2 pour k = 1 et la figure 5-3 pour k = 2.

On peut noter que :

- P_S^j, $P^j_{S/I_k}(i_k)$ k = 1, 2 sont des suites croissantes de j;
- les indices pour lesquels $P^j_{S/I_k}(i_k) < P_S^j$ ont une probabilité de tirage décroissante au cours des étapes ;
- les indices pour lesquels $P^j_{S/I_k}(i_k) > P_S^j$ ont des probabilités de tirage croissantes au cours des étapes ;
- pour $i_2 = 5$, $P^j_{S/I_2}(i_2)$ est tantôt inférieur à P_S^j, tantôt supérieur ; la loi de tirage est d'abord croissante puis décroissante ;
- au bout de 14 étapes, on ne tire plus que dans le tableau $I'_1 \times I'_2$, $I'_1 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ et $I'_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Le tableau des $P_{S/I_1I_2}(i_1, i_2)$ associé est alors :

I_2 \ I_1	5	6	7	8	9
4	0	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1

Presque toutes les épreuves sont alors des succès, et les lois de tirage ne seront pratiquement plus modifiées.

Alors, en prenant une valeur δ_o plus petite, on modifie le tableau des $\left\{ P_{S/I_1I_2}(i_1, i_2), (i_1, i_2) \in I_1 \right\}$ en diminuant le nombre de couple (i_1, i_2) qui donne des succès.

5 - 3 DISTRIBUTION THEORIQUE ASSOCIEE AUX LONGUEURS DE CORDE D'ESPACES MEDULLAIRES - ESTIMATION DES PARAMETRES

5 - 3-1 Le modèle

L'examen des histogrammes des fréquences relatives de longueurs de corde d'espaces médullaires permet de supposer l'existence de trois populations de longueurs de corde et d'associer à chacune d'entre elles une loi de probabilité (figure 5-4).

La première population représente les petites longueurs de corde et suit une loi qui peut être considérée comme exponentielle.

La seconde population peut être représentée par une fonction proche d'une courbe en cloche, mais légèrement dissymétrique ; aussi lui a-t-on associé une loi gamma.

La troisième population représente les très grandes longueurs de corde ; on lui associe une loi exponentielle.

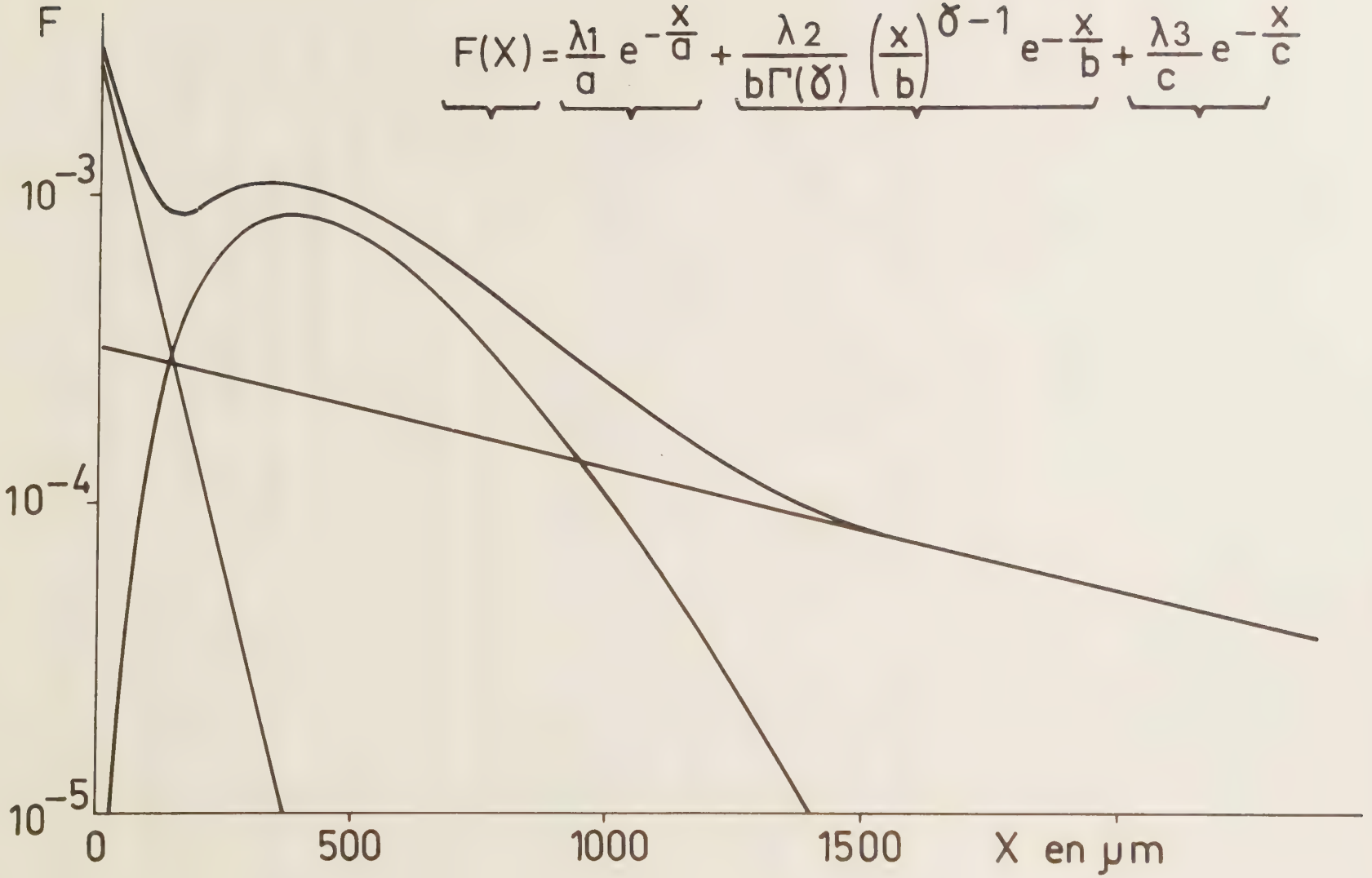


Figure.5_4_Modèle de distribution des espaces médullaires

La densité de probabilité d'une longueur de corde d'espace médullaire x s'écrit :

$$f(x) = \frac{\lambda 1}{a} e^{-\frac{x}{a}} + \frac{\lambda 2}{b\Gamma(\gamma)} e^{-\frac{x}{b}} \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma-1} + \frac{\lambda 3}{c} e^{-\frac{x}{c}}$$

où :

- λ_1, λ_2, λ_3 sont respectivement les probabilités théoriques pour qu'une longueur de corde appartienne à l'une des trois populations

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 1$$

- a, b γ, c sont respectivement les longueurs moyennes de corde des trois populations.

5 - 3-2 Ajustement du modèle aux données expérimentales

L'ajustement est effectué sur les polygones des fréquences associés aux longueurs de corde d'espaces médullaires obtenues à partir des histogrammes utilisés en analyse de données (chapitre 4-2).

Pour chaque individu de l'échantillon, on recherche le jeu de valeurs des six paramètres qui minimise l'indice de dissimilarité choisi : "la distance du χ^2" de centre la loi empirique

$$d_{\chi^2_{\underline{y}}}(\underline{f}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f(x_i) - y_i)^2}{y_i}$$

Pour rendre minimum $d\chi^2_y$ on utilise la technique décrite au paragraphe 5-2.

5 -3-3 Les résultats

L'ajustement est effectué pour tous les individus de l'échantillon.

Les valeurs moyennes des paramètres par classe d'âge, données dans le tableau 5-1, permettent de définir la distribution des longueurs de corde d'espaces médullaires d'un individu "moyen" de la classe d'âge.

La figure 5-5 présente un exemple d'ajustement pour un enfant de 15 mois.

La figure 5-6 présente les probabilités de chaque population en fonction de l'âge. On remarque l'opposition entre les petites et les grandes longueurs de corde.

La première population est la plus importante à la naissance et devient négligeable chez l'adulte. La troisième population ne devient importante qu'à partir de six mois.

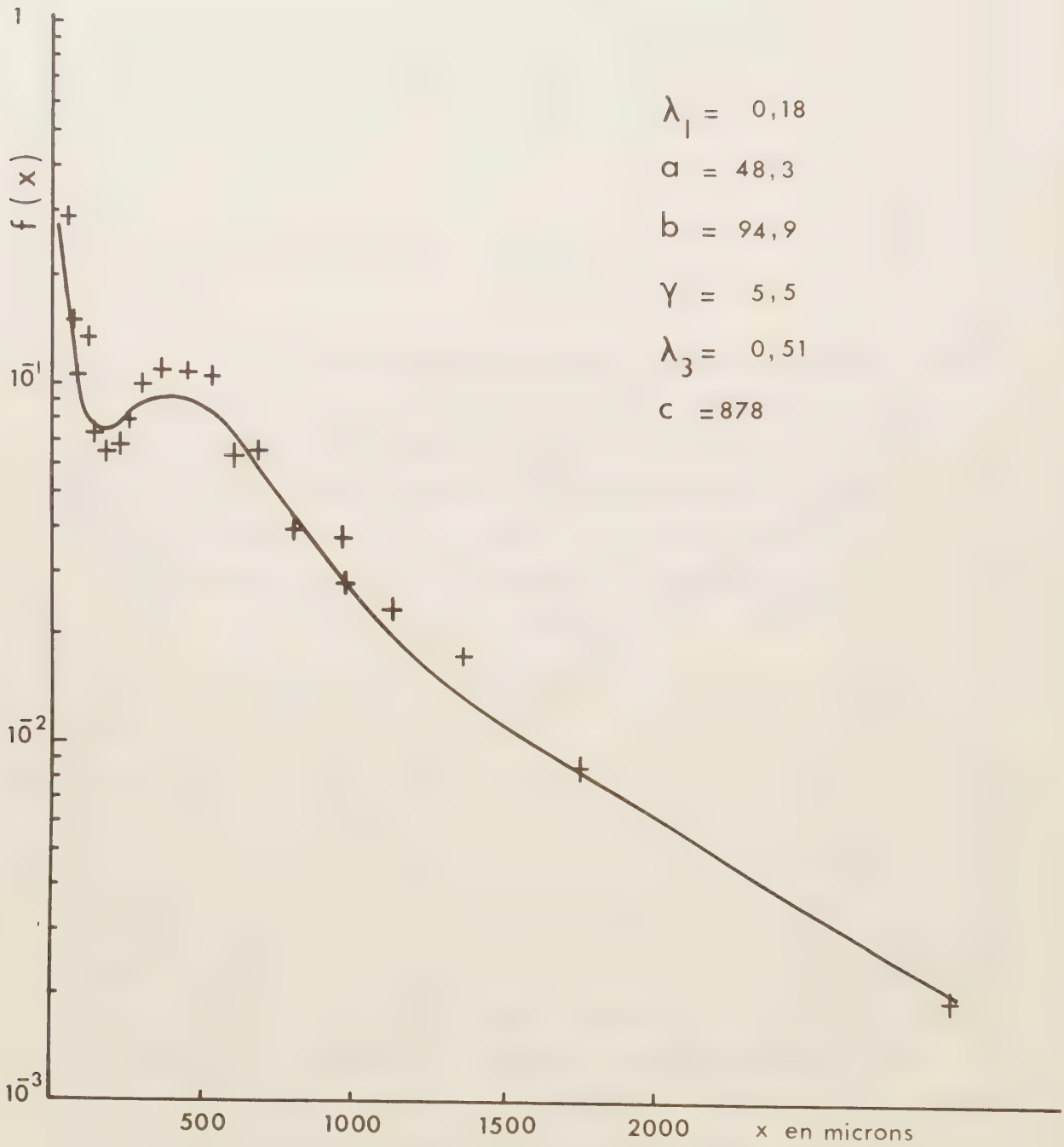


Figure. 5_5 : Un exemple d'ajustement

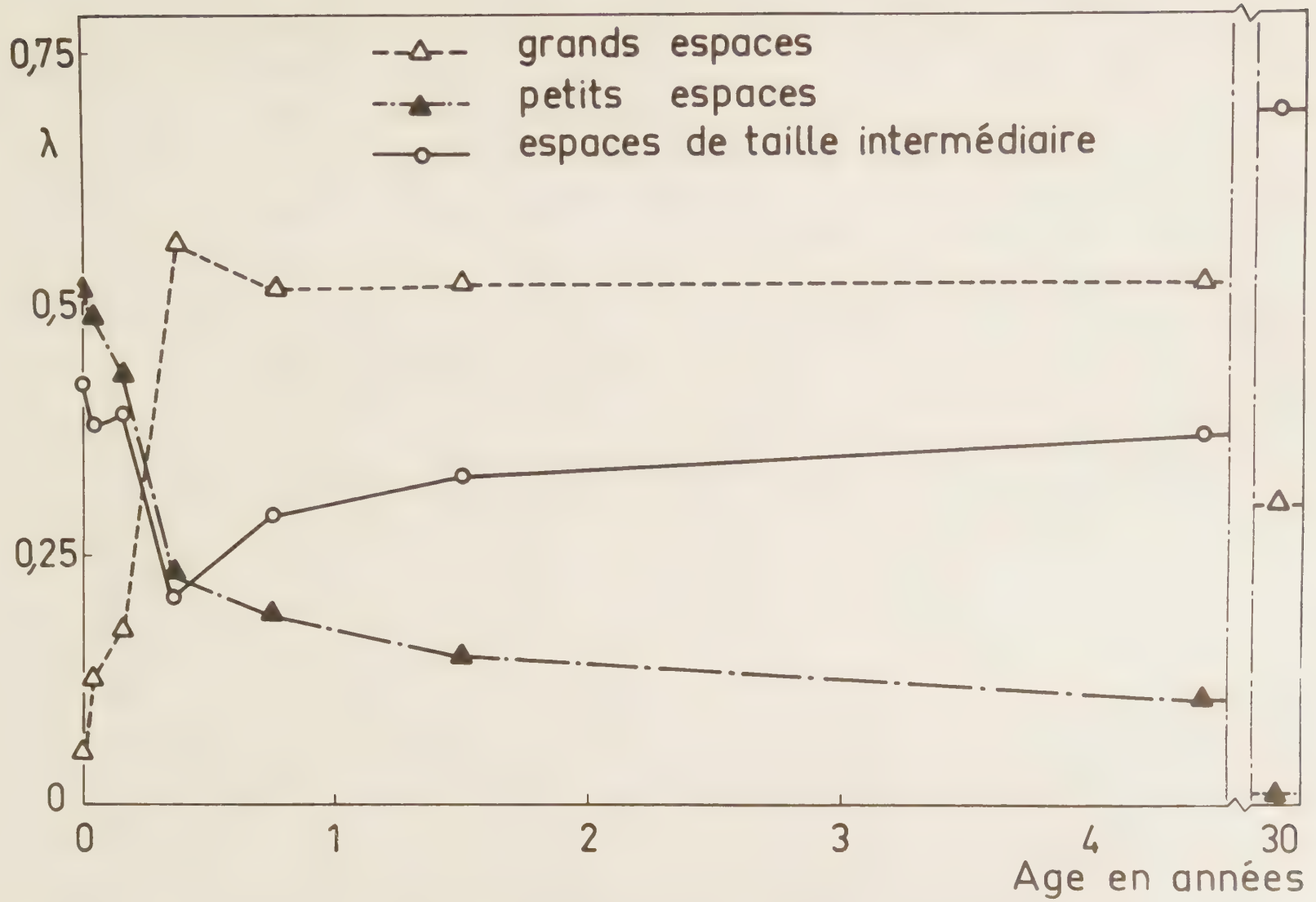


Figure.5_6_Proportion des populations d'espaces médullaires

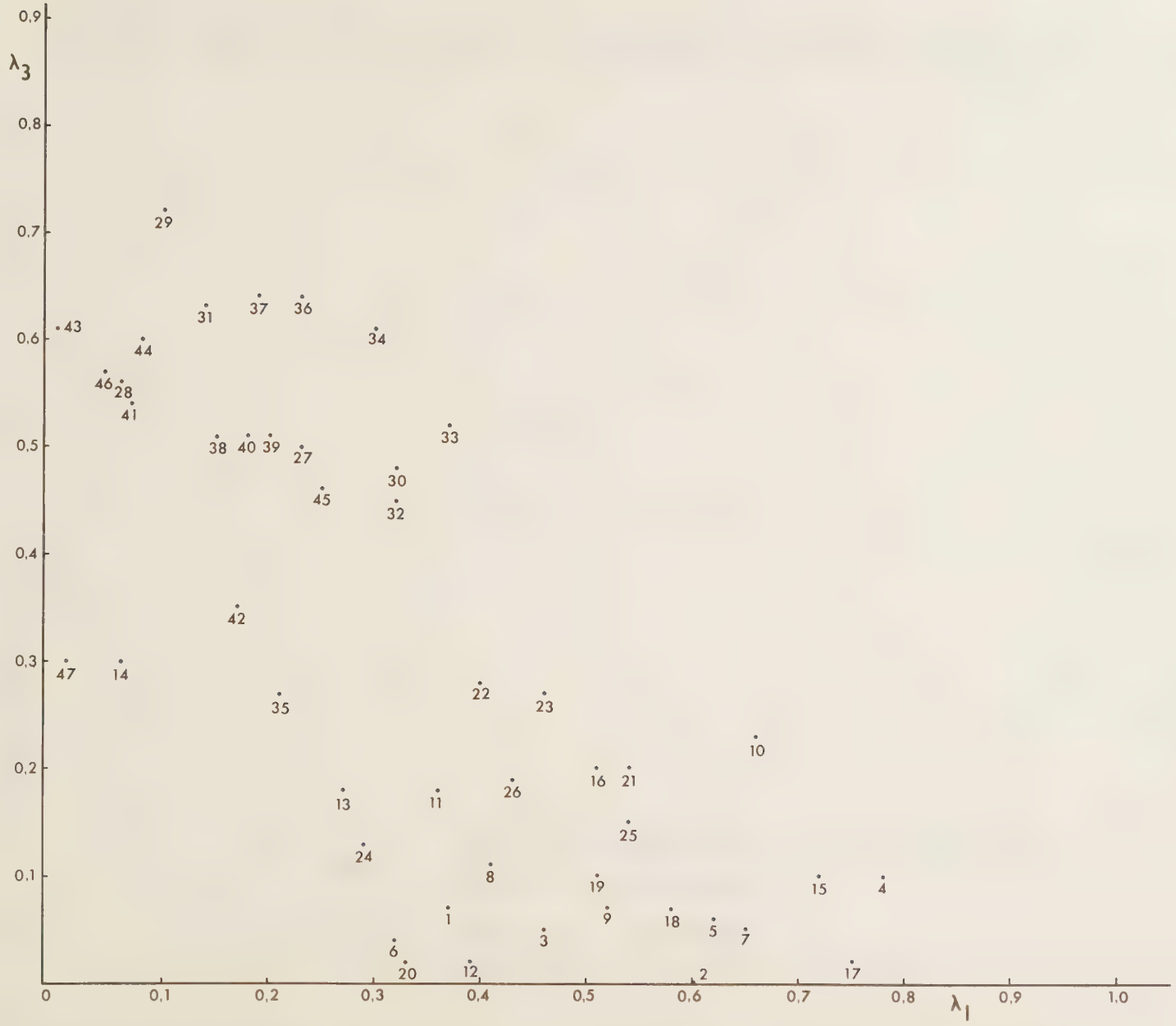


Figure. 5_7 : Représentation des individus en fonction des proportions de petits et grands espaces

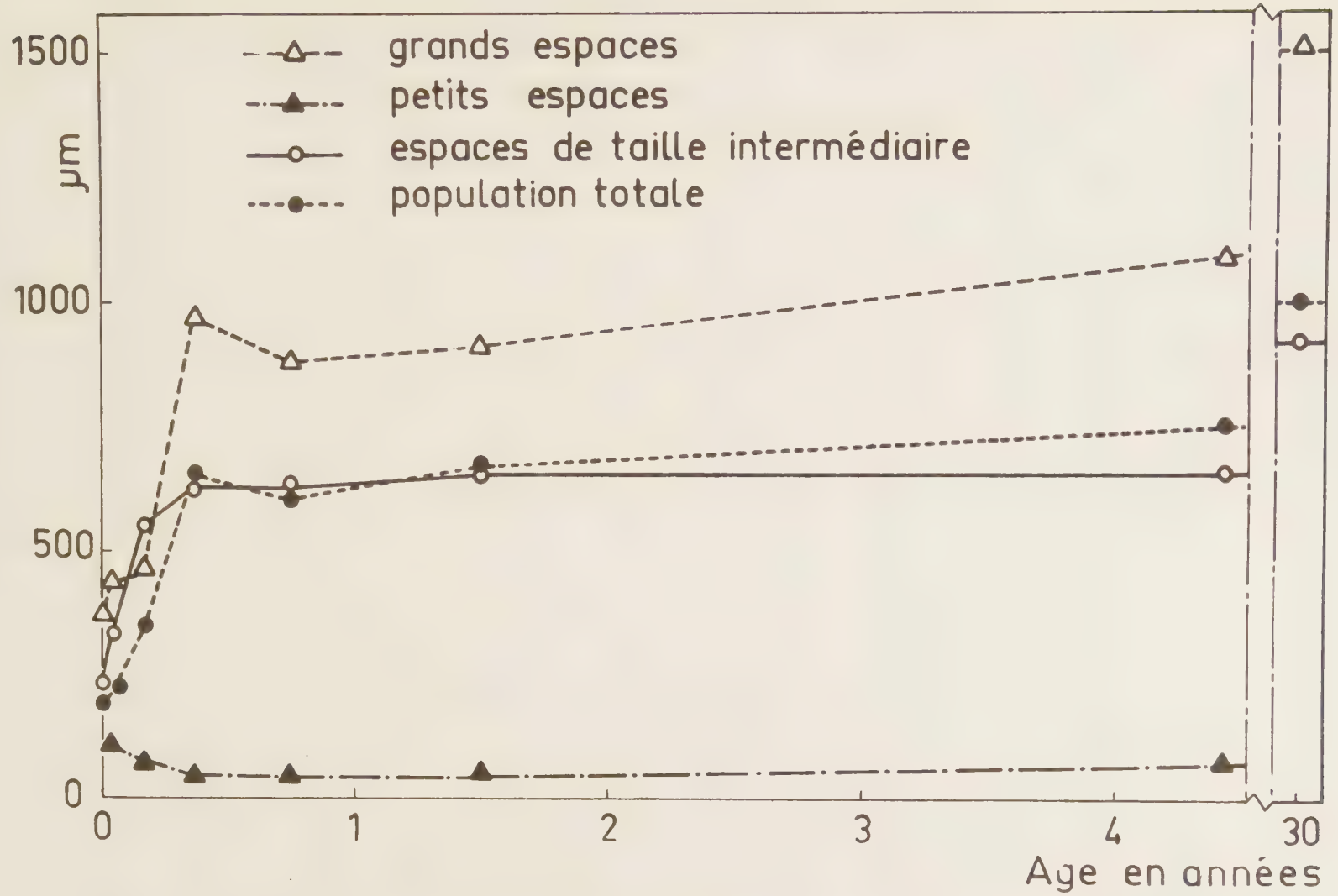


Figure. 5_8_ Taille moyenne des populations d'espaces médullaires

La représentation des individus dans un plan en fonction des probabilités de la première et de la troisième populations (figure 5-7) montre, comme en analyse de données, que les enfants de moins de trois mois sont séparés des individus plus âgés.

La figure 5-8 présente l'évolution avec l'âge de la moyenne de chaque population, ainsi que celle de la population globale.

Tableau 5-1 Valeurs des paramètres du modèle pour l'individu moyen de chaque classe d'âge

Classe d'âge	λ_1	a	b	γ	λ_3	c
Prématurés	0,525	102,2	80,5	2,92	0,053	372,5
0 à 1 mois	0,492	104,1	121,7	2,71	0,125	439,2
1 à 3 mois	0,427	79,6	176,5	3,11	0,177	480,6
3 à 6 mois	0,230	46,6	150,1	4,20	0,559	970,5
6 mois à 1 an	0,195	46,5	161,7	3,87	0,515	879,7
1 à 2 ans	0,150	48,1	117,0	5,63	0,520	928,3
plus de 2 ans	0,091	78,0	152,8	4,33	0,518	1 105,2
Adulte	0,010	200,0	230,0	4,00	0,300	1 500,0

5 - 4 CONCLUSION

L'examen des histogrammes a permis de constater la déformation des distributions de longueurs de corde d'espaces médullaires avec l'âge de l'individu.

Le classement, obtenu par l'analyse de données, sans hypothèse a priori, et résultant de l'opposition entre les petites et les grandes

longueurs de corde est proche du classement suivant l'âge de l'individu.

Le modèle choisi, un mélange de trois lois de probabilités, permet d'"expliquer" l'évolution avec l'âge de l'organisation de l'os spongieux dans la vertèbre.

On distingue deux périodes :

- la première, de la naissance au sixième mois est caractérisée par un remaniement important de l'os spongieux qui se traduit par une grande variation des probabilités théoriques pour qu'une longueur de corde appartienne à l'une des trois populations, et par la variation de la moyenne de chaque population ;

- la seconde concerne les enfants, âgés de plus de six mois. Les populations de longueurs de corde sont stabilisées, et l'évolution avec l'âge se traduit par une variation lente de leurs probabilités théoriques.

La forme de la distribution des longueurs de corde d'espaces médullaires chez l'adulte de notre échantillon est semblable à celle des distributions publiées par d'autres auteurs (8, 15, 16, 31).

CHAPITRE VI

ESTIMATION DES DEBITS DE DOSE ABSORBEE DANS LA VERTEBRE

Dans l'os spongieux de la vertèbre :

- le milieu source, émetteur d'électrons, est l'ensemble des travées osseuses, que l'on suppose contaminées uniformément ;

- le milieu cible est soit la moelle osseuse contenue dans les espaces médullaires, soit les tissus endostéaux situés au contact des parois des travées osseuses dans les espaces médullaires.

Pour évaluer le débit de dose absorbée, tant à la moelle osseuse qu'aux tissus endostéaux, il faudrait calculer l'énergie moyenne communiquée à l'ensemble des tissus du site radiosensible considéré, par les électrons émis dans toutes les travées. La complexité de l'os spongieux ne permet pas une telle approche du problème.

L'hypothèse d'homogénéité formulée en 3-2-1, et la connaissance des distributions des longueurs de corde des travées osseuses et des espaces médullaires permettent de passer d'une formulation dans l'espace, à une formulation linéaire du problème en utilisant la probabilité, pour un point situé à la distance x d'un point cible, d'être dans une travée.

6 - 1 ELECTRONS MONOCINETIQUES

6 - 1-1 Principe général

Soient P un point cible dans un espace médullaire et Q un point source dans une travée osseuse séparés par la distance z. Les électrons sont émis avec l'énergie cinétique E et ont un parcours résiduel r_o.

Dans une première étape, on va exprimer l'énergie moyenne communiquée dans un volume élémentaire entourant le point cible P par les électrons émis dans les travées osseuses.

Dans une seconde étape, on exprimera le débit de dose absorbée par la moelle osseuse en fonction de l'énergie moyenne communiquée le long de cordes d'espaces médullaires.

6 - 1-1-1 Energie moyenne communiquée dans un volume élémentaire entourant un point cible P

Soient N_o le nombre d'électrons émis par unité de volume dans les travées osseuses ;

$h(z)$ la probabilité pour qu'un point situé à la distance z d'un point cible P soit dans une travée osseuse.

REMARQUE -

Les travées osseuses et les espaces médullaires sont des domaines disjoints et recouvrent l'os spongieux;aussi, la probabilité pour qu'un point situé à la distances z d'un point cible P soit dans un espaces médullaire est $(1 - h(z))$.

Dans la vertèbre le nombre d'électrons émis à une distance du point P comprise entre z et z + dz, l'hypothèse d'homogénéité étant vérifiée, est :

$$N_o . 4 \pi z^2 dz . h(z)$$

Dans un milieu homogène, l'énergie moyenne communiquée dans un volume élémentaire dz $d\sigma$ entourant un point cible par électron émis à la distance z (2 - 2)

$$W(z)\, dz\, d\sigma = \frac{dE}{dr}(E_o) \frac{J\left(\frac{z}{ro}\right)}{4 \pi z^2} dz\, d\sigma$$

En 2-3-1 on a défini la transformation de distances dans l'os spongieux en distance équivalent tissu mou.

On a :

- dans les travées osseuses :

$$X = \alpha \delta x$$
$$dX = \alpha \delta dx$$

- dans les espaces médullaires

$$Y = y$$
$$dY = dy$$

- pour une distance quelconque séparant deux points P et Q :

$$z = x + y$$
$$Z = X + Y$$

et les éléments différentiels

- dans les travées osseuses : $dz = dx$
  $dZ = dX$
- dans les espaces médullaires : $dz = dy$
  $dZ = dY$.

Par conséquent, le nombre d'électrons émis à une distance équivalent tissu mou du point P comprise entre Z et Z + dZ est :

$$N(Z)\, dZ = N_o \; 4\pi \; Z^2 \; \frac{dZ}{\alpha \delta} \; h(Z)$$

REMARQUE -

Cela revient à transformer l'élément différentiel dx dy dz dans une travée osseuse en dX dY dZ où :

$$dX = \alpha \delta \; dx$$
$$dY = \quad dy$$
$$dZ = \quad dz$$

Dans un milieu homogène équivalent tissu mou, l'énergie moyenne communiquée dans un volume élémentaire dy $d\sigma$ entourant un point cible P par électron émis à la distance équivalent tissu mou Z est :

$$W(Z)\, dy\, d\sigma = \frac{dE}{dr}(E_o)\, \frac{J\left(\frac{Z}{r_o}\right)}{4\pi Z^2}\, dy\, d\sigma$$

Finalement, l'énergie moyenne communiquée au volume dy $d\sigma$ entourant le point cible P par les électrons dans la vertèbre est :

$$W_1(y)\, dy\, d\sigma = dy\, d\sigma \int_{Z=0}^{Z=\infty} W(Z)\, N(Z)\, dZ$$

$$\text{Soit } W_1(y)\, dy\, d\sigma = \frac{N_o}{\alpha \delta} \; \frac{dE}{dr}(E_o) \; dy\, d\sigma \int_{Z=0}^{Z=\infty} h(Z)\, J(Z)\, dZ.$$

REMARQUE -

y représente la distance du point cible P à la première travée.
Pour $0 < Z < y$, on a : $h(Z) = 0$.

6 - 1-1,2 Débit de dose absorbée par la moelle osseuse et par les tissus endostéaux de la vertèbre

On connait dans la vertèbre la densité de probabilité f(L) des longueurs de corde d'espaces médullaires; aussi est-il naturel d'estimer l'énergie moyenne communiquée dans un élément de volume L dσ situé le long d'une corde d'espace médullaire de longueur L.

Celle-ci est égale à :

$$W_2(L).\ L\ d\sigma = \int_{y=0}^{y=L} W_1(y)\ dy\ d\sigma$$

La quantité $\frac{W_2(L)}{\rho}$ est le débit de dose absorbée dans le volume L dσ, où ρ est la masse volumique des tissus mous.

Le débit de dose absorbée par la moelle osseuse de la vertèbre est donc :

$$D(E) = \int_{L=0}^{L=\infty} \frac{W_2(L)}{\rho}\ f(L)\ dL$$

Le débit de dose absorbée par les tissus endostéaux de la vertèbre est :

$$DI(E) = \frac{W_1(0)}{\rho}$$

REMARQUES -

1° - Les tissus endostéaux sont situés, au contact des travées osseuses, dans les espaces médullaires et leur épaisseur est de l'ordre de 10 microns (35). Pour estimer le débit de dose absorbée par ces tissus, il faudrait évaluer l'énergie moyenne communiquée à une plaque de tissu de 10 microns d'épaisseur, ou bien aux tissus d'un espace médullaire de petite taille.

Aussi, exprimer le débit de dose absorbée par les tissus endostéaux par :

$$DI(E) = \frac{W_1(0)}{\rho}$$

constitue une approximation qui ne sera justifiée que par l'examen des résultats : l'énergie moyenne communiquée le long de petites cordes d'espaces médullaires varie peu avec leur longueur.

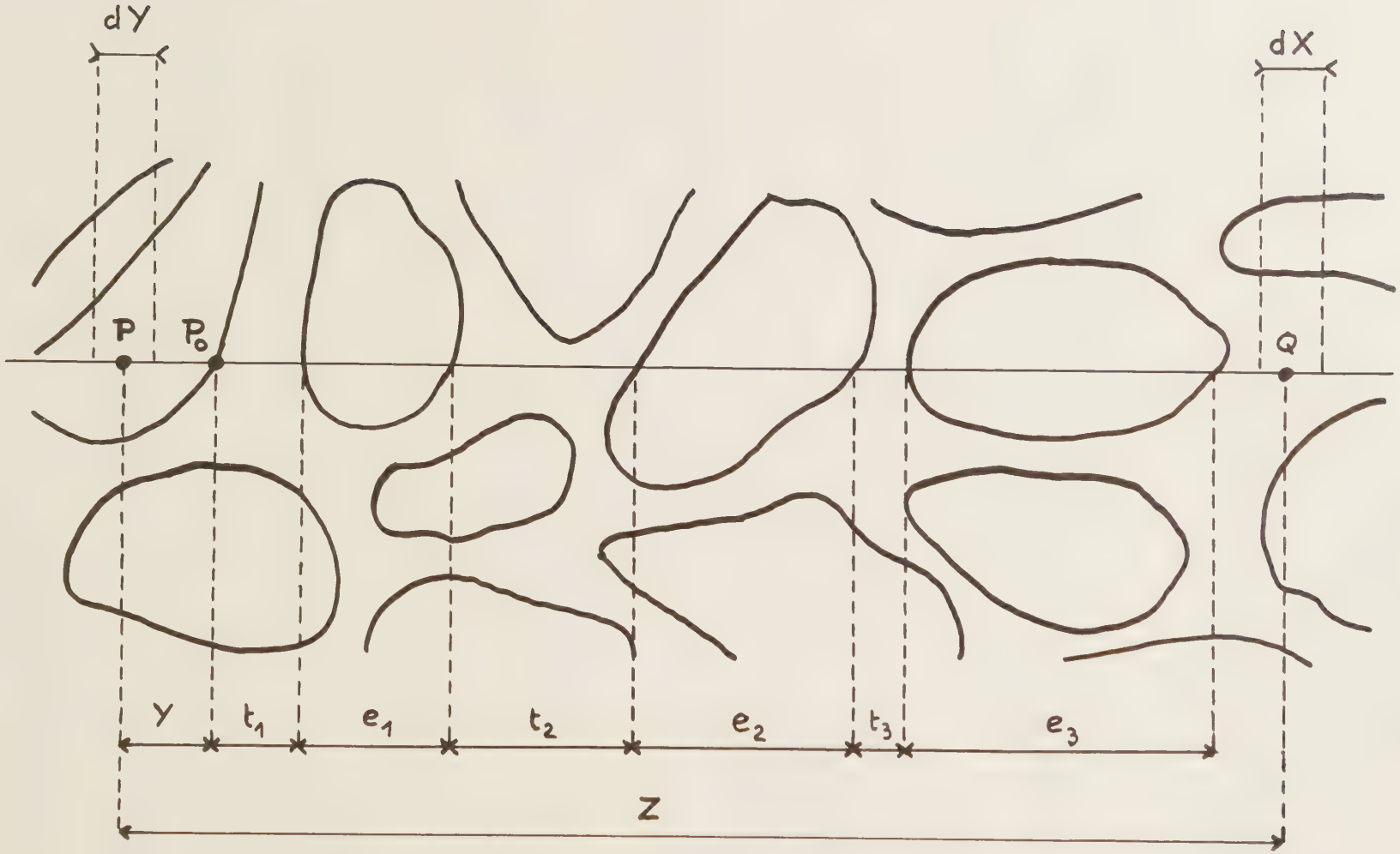


Figure . 6 _ 1 :

2- Les fonctions $W_1(y)$ et $W_2(L)$ ne représentent aucune réalité physique, bien qu'elles soient équivalentes à des débits de dose absorbée. En effet, en un point P d'un espace médullaire, il passe une infinité de cordes. Le débit de dose abosrbée au point P est la somme des valeurs de $W_1(y)$ obtenues pour chaque corde.

Mais, les fonctions $W_1(y)$ et $W_2(y)$ permettent d'estimer le débit de dose absorbée par la moelle osseuse dans la vertèbre, c'est-à-dire la valeur moyenne dans le volume occupé par les espaces médullaires.

On peut l'estimer à partir :

- soit des débits de dose absorbée "ponctuels", chaque point étant équiprobable;
- soit des fonctions $W_2(L)$, connaissant la distribution des longueurs de corde d'espaces médullaires dans l'os.

6 - 1-2 Probabilité pour qu'un point situé à la distance Z d'une point cible soit dans une travée osseuse

6 - 1-2-1 Remarques préliminaires

La distance du point cible au point source Z est une distance équivalent tissu.

La probabilité pour qu'un point situé à la distance Z d'un point cible P soit dans une travée osseuse dépend de la distance y du point P à la travée voisine y.

Et on a, quel que soit y :

$0 \leqslant Z < y \qquad h(Z) = 0$

Soit P_o un point au contact de la travée osseuse :
alors, on a :

$$h_P(y) = h_{P_o}(0)$$

et $\quad h_P(Z) = h_{P_o}(Z-y)$

avec $\quad Z \geqslant y$

Il suffit donc de calculer les valeurs de la fonction $h_{P_o}(Z)$. Cela entraîne que le premier milieu traversé en partant de P_o soit une travée et on a :

$$\lim_{Z \to o} h_{P_o}(Z) = 1$$

Pour estimer le débit de dose aux tissus endostéaux, on a utilisé la fonction $h_I(Z)$ telle que :

$$h_I(Z) = \frac{1}{2} h_{P_o}(Z) + h'_{P_o}(Z)$$

Pour $h_{P_o}(Z)$ on impose que le premier milieu traversé en partant de P_o est une travée osseuse.

Pour $h'_{P_o}(Z)$ on impose que le premier milieu traversé en partant de P_o est un espace médullaire.

Et on a :

$$h'_{P_o}(Z) = 0$$

Les fonctions $h_{P_o}(Z)$ et $h'_{P_o}(Z)$ sont obtenues en tirant au hasard alternativement des longueurs de corde dans les distributions de longueurs de corde des travées osseuses et des espaces médullaires.

6 - 1-2-2 Processus de tirage au hasard

Le processus utilisé consiste à reconstituer l'intersection d'un axe quelconque avec la vertèbre. Il est le suivant pour $h_{P_o}(Z)$:

- le tirage au hasard initial se fait dans la distribution des longueurs de corde des travées osseuses ;

- ensuite, on tire alternativement, dans la distribution des longueurs de corde d'espaces médullaires et dans celle des travées osseuses ;

- on obtient ainsi deux séquences de nombres :

$(t_i \quad , i=1, n_1)$ et $(e_i, \quad i=1, n_2)$.

- on cesse le tirage dès que la relation :

$$\sum_{i=1}^{n_1} t_i + \sum_{i=1}^{n_2} e_i \geqslant R$$

est satisfaite.

R est le parcours résiduel des électrons d'énergie la plus élevée.

- Ces deux séquences de nombres définissent deux familles d'intervalles disjoints :

$$V_i = [a_i, b_i[$$

$$U_i = [b_i, a_{i+1}[$$

ou :

$$a_i = 0$$

$$a_{i+1} = b_i + e_i$$

$$b_i = a_i + t_i$$

- Soit $\delta_1(Z)$ l'application de $0, R$ dans $0, 1$ telle que :

$$\delta_1(Z) = 1 \quad \text{pour} \quad Z \in \bigcup_i V_i$$

$$= 0 \quad \text{pour} \quad Z \in \bigcup_i U_i$$

- En recommençant une série de tirages au hasard, on obtient une nouvelle application $\delta_2(Z)$, etc...

- Si l'on a effectué N séries de tirages au hasard, une estimation de la probabilité pour qu'un point situé à la distance Z du point P_o soit dans une travée est :

$$h_{p_o}(Z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_j(Z)$$

Dans le cas de l'estimation de la fonction $h'_{p_o}(Z)$, l'ordre des tirages au hasard des longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires est inversé.

Les familles d'intervalles U_i et V_i deviennent alors :

$$V_i = [a_i, b_{i+1}[$$

$$U_i = [b_i, a_i[$$

où :

$$b_1 = 0$$

$$a_i = b_i + e_i$$

$$b_{i+1} = a_i + t_i$$

6 - 1-2-3 Propriété des fonctions $h_{p_o}(Z)$ et $h'_I(Z)$

Les tirages initiaux entraînent que :

$$h_{p_o}(0) = 1$$
$$h_I(0) = \frac{1}{2}$$

L'hypothèse d'homogénéité, formulée en 2-2, entraîne que la probabilité de tirer au hasard un point dans une travée sur un axe quelconque Δ traversant la vertèbre est :

$$p = \frac{\sum_i t_i}{\sum_i t_i + \sum_j e_j}$$

$(t_i, \quad i=1, n_t^i)$ est l'ensemble de longueur de corde de travée sur Δ

$(e_j, \quad j=1, n_e^i)$ est l'ensemble de longueur de corde de travée sur Δ

Soient - un plan de coupe et un point de coordonnée (x, y) dans ce plan
- f(x, y) la densité de probabilité pour que le point (x, y) appartienne à une travée.

Sur toutes les droites y = a on a :

$$p = \int_x f(x, a)\, dx$$

Dans le plan de coupe, la probabilité p' de tirer au hasard un point dans une travée est égale au rapport de l'aire occupée par les travées à l'aire totale de la coupe, et :

$$p' = \int_{x,y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Or p = Proba (ensemble $\{(x, y) \in$ travée$\}$ / $y = a$)

p'= Proba (ensemble $\{(x, y) \in$ travée$\}$)

D'après l'hypothèse d'homogénéité p est indépendant de y. D'où :

$$p' = \int_y p\, g(y)\, dy$$

où g(y) est la densité de probabilité de tirer une droite Y = y.

Donc

$$p' = p = \frac{\sum_i t_i}{\sum_i t_i + \sum_j e_j}$$

Il en serait de même dans la vertèbre tout entière.

REMARQUE -

Lorsque les distances dans l'os sont exprimées en équivalent tissu mou, la probabilité p devient :

$$p = \frac{\alpha\delta \sum_i t_i}{\sum_j e_j + \alpha\delta \sum_i t_i}$$

6 - 2 SPECTRE D'ENERGIE

Le spectre d'énergie d'un émetteur β^- est la densité de probabilité de l'énergie d'émission d'un électron.

Soient :

- D(E) le débit de dose absorbée délivrée par des électrons d'énergie E ;

- g(E) la densité de probabilité de l'énergie d'émission E.

Le débit de dose absorbée, délivré par le spectre d'énergie est :

$$\bar{D} = \int_{E=0}^{E=Em} D(E)\, g(E)\, dE$$

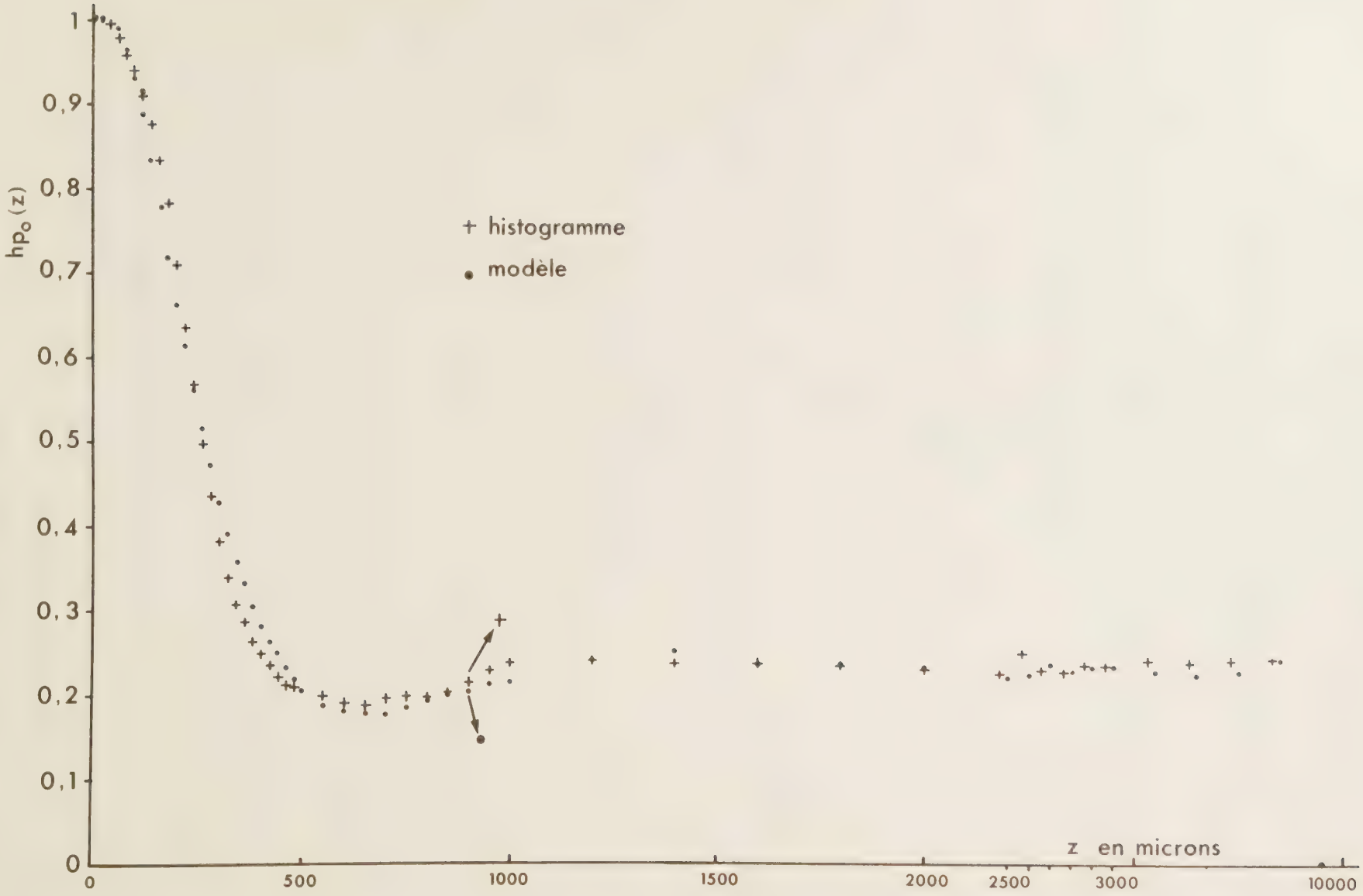


Figure. 6 - 2 : Fonctions hp$_o$ (z) pour l'adulte

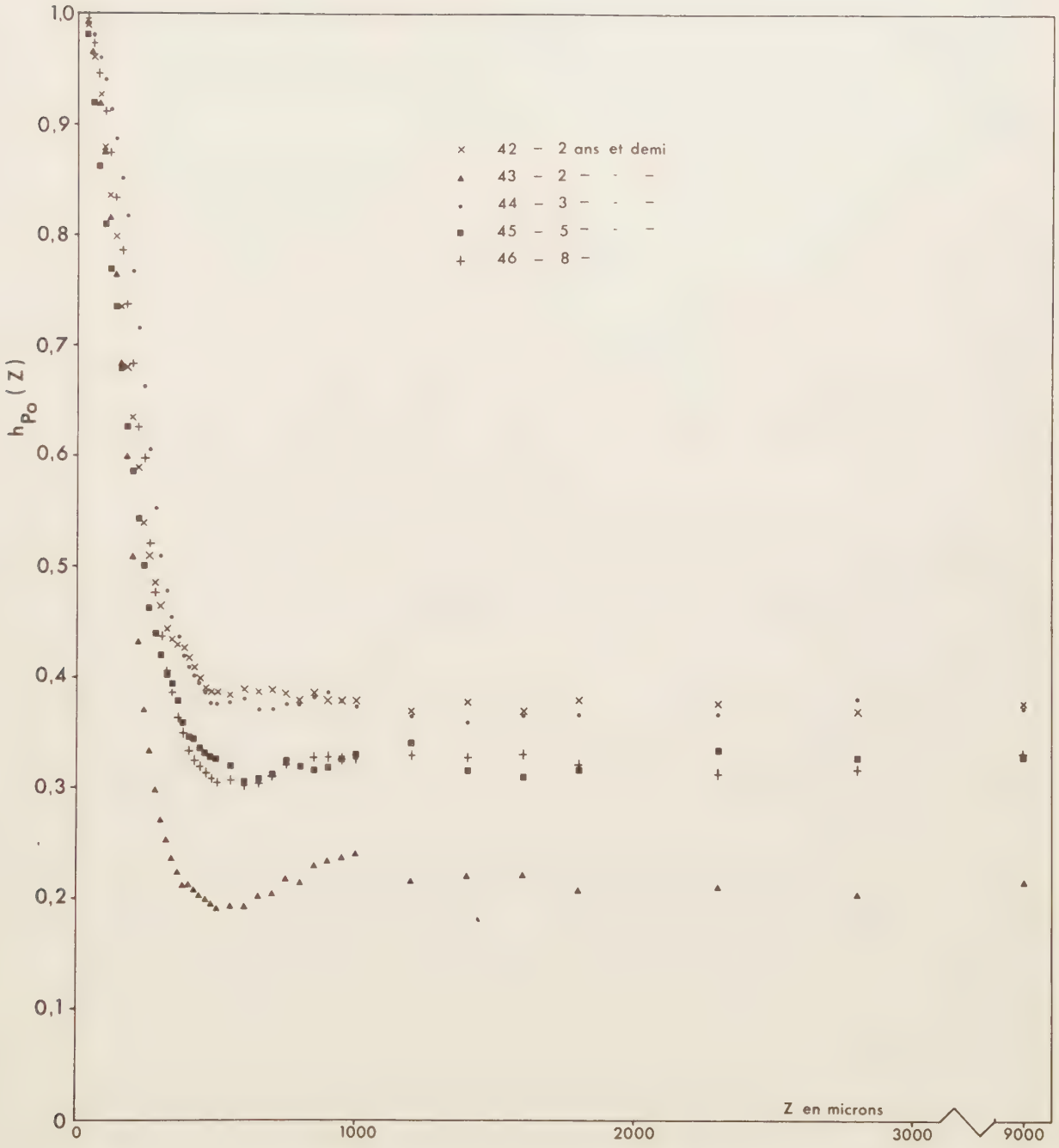


Figure . 6 _ 3 : Fonctions $h_{Po}(Z)$ pour les enfants de plus de 2 ans

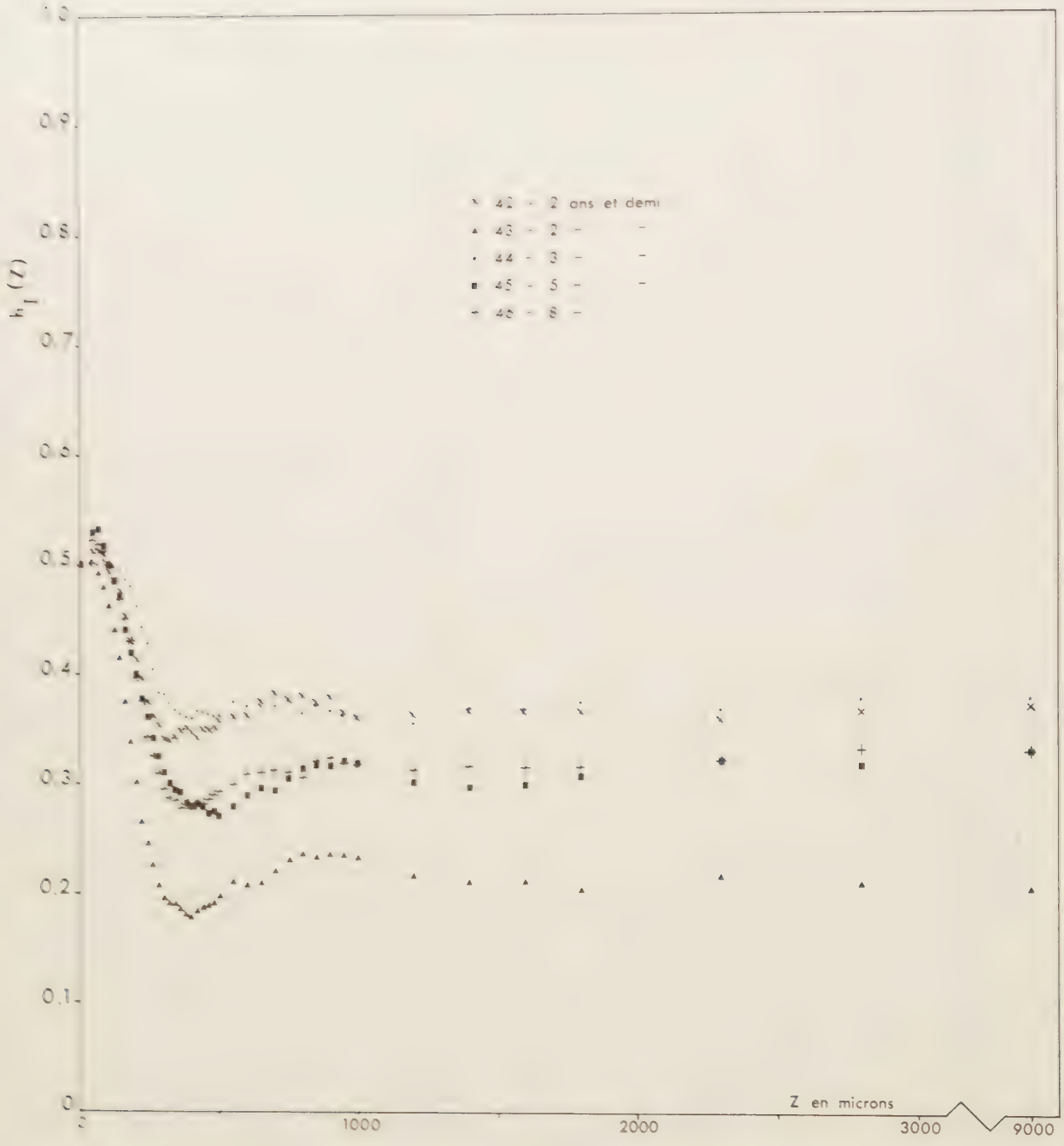


Figure . 6 - 4 : Fonctions $h_I(Z)$ pour les enfants de plus de 2 ans

où Em est l'énergie maximale du spectre. Le débit de dose absorbée, délivrée par un mélange de spectre :

$$\bar{D}_M = \sum_j F_j \bar{D}_j$$

où F_j est le rapport du nombre d'électrons émis par le jème spectre au nombre d'électrons émis par le premier spectre.

6 - 3 LES RESULTATS

6 - 3-1 Les fonctions $h_{p_o}(Z)$ et $h_I(Z)$

Les fonctions $h_{p_o}(Z)$ et $h_I(Z)$ sont estimées pour :

- tous les individus de plus de deux ans, en utilisant les histogrammes des fréquences relatives de longueur de corde des travées osseuses et des espaces médullaires ;
- pour l'individu "moyen" de chaque classe d'âge définie dans le tableau 3-2. Cet individu "moyen" est obtenu en prenant les valeurs moyennes des paramètres dans la classe d'âge :
  - . de la loi log-normale : moyenne et écart-type, pour les travées osseuses ;
  - . du mélange de trois lois de probabilité, associées aux histogrammes relatifs aux espaces médullaires, donnés dans le chapitre IV.

Dans tous les cas, on a simulé 5 000 axes traversant la vertèbre. La somme des longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires pour chacun d'entre eux est limité à 9 604 microns, valeur du parcours des électrons de 2 MeV.

L'écart-type de l'estimation de $h_{p_o}(Z)$ ou de $h_I(Z)$ est toujours inférieur à 2,5 % de la valeur estimée quelle que soit la distance équivalent tissu mou Z et quel que soit l'individu.

La figure 6-2 présente les fonctions $h_{p_o}(Z)$ obtenues pour l'adulte en utilisant d'une part les histogrammes des fréquences de longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires et d'autre part les modèles statistiques. Les figures 6-3 et 6-4

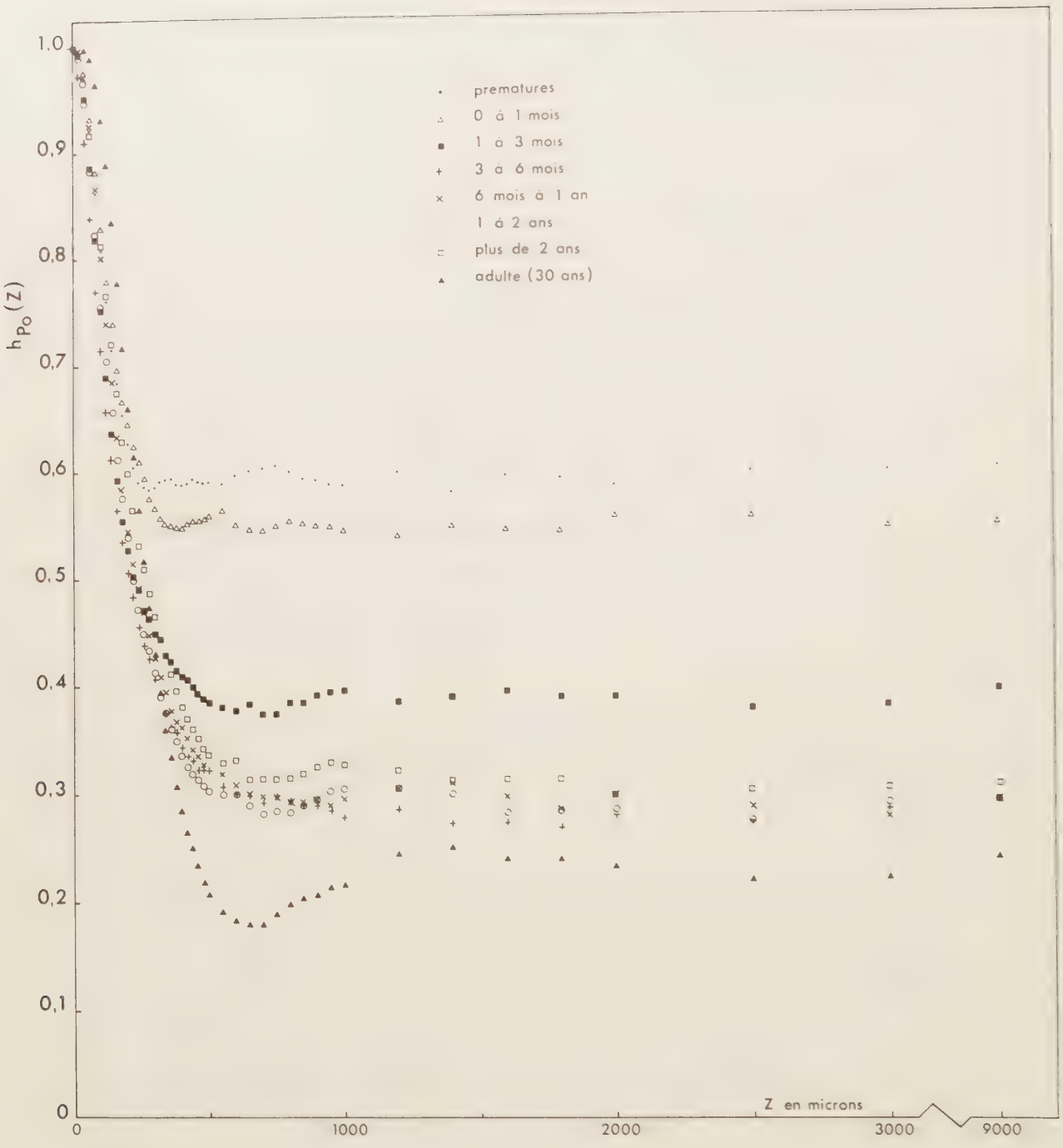


Figure . 6 _ 5 : Fonctions $h_{Po}(Z)$ pour les classes d'âge de l'échantillon

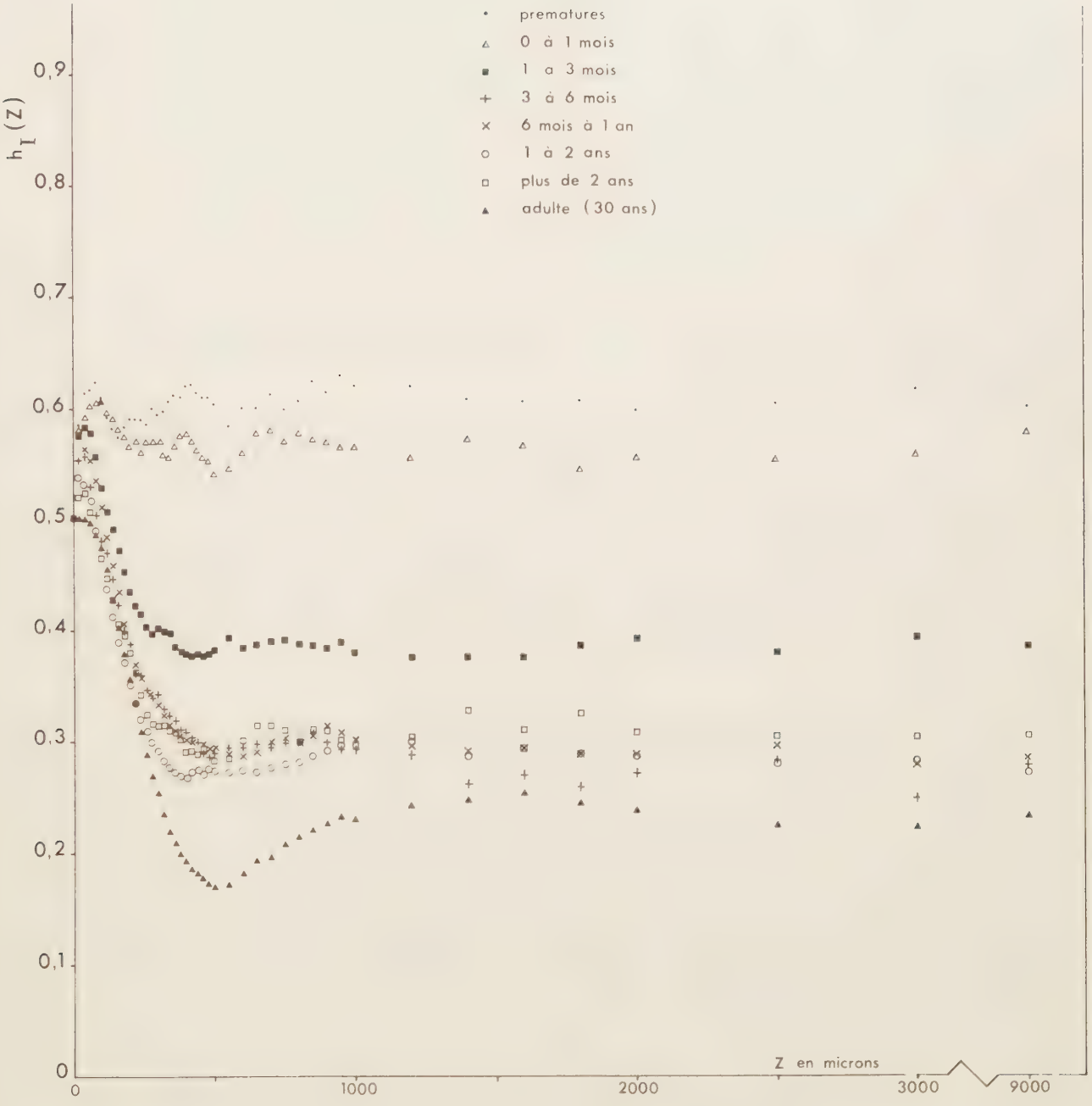


Figure. 6_6 : Fonctions $h_I(Z)$ pour les classes d'âge de l'échantillon

présentent respectivement les fonctions $h_{p_o}(Z)$ et $h_I(Z)$ obtenues en utilisant les histogrammes expérimentaux des individus de plus de deux ans et celles de l'individu moyen de la classe d'âge.

Les figures 6-5 et 6-6 présentent respectivement les fonctions $h_{p_o}(Z)$ et $h_I(Z)$ pour les individus moyens de chaque classe d'âge. Les courbes pour les enfants de plus de trois mois sont assez proches les unes des autres. La valeur du plateau que l'on observe au-delà de 300 microns pour les enfants de moins de un mois, et de 500 microns pour les individus plus âgés, est égal à la probabilité de tirer au hasard un point dans une travée dans un milieu équivalent tissu mou.

6 - 3-2 Débit de dose absorbée en fonction de l'âge de l'individu et de l'énergie des électrons

Les débits de dose absorbée par les tissus endostéaux (figure 6-7 et tableau 6-2) et par la moelle osseuse (figure 6-8 et tableau 6-1) de la vertèbre sont des fonctions linéaires de l'énergie des électrons pour les enfants de moins de trois mois. Pour les individus plus âgés, la linéarité n'existe que pour des électrons d'énergie supérieure à 0,4 MeV. Les résultats sont exprimés en rad par jour pour $3{,}7.10^{-4}$ électrons émis par gramme d'os.

6 - 3-3 Débit de dose absorbée pour les spectres d'énergie

Les figures 6-9 et 6-10 présentent respectivement l'évolution des débits de dose absorbée par les tissus endostéaux et par la moëlle osseuse, en fonction de l'âge de l'individu pour les spectres d'énergie du strontium-90, de l'yttrium-90 et du mélange strontium - yttrium (tableau 6-3). Les résultats sont exprimés en rad par jour par microcurie de ^{90}Sr par gramme d'os.

Dans les deux cas, les débits de dose absorbée sont maximaux à la naissance, décroissent jusqu'à la classe d'âge de 4 à 6 mois et restent pratiquement constants pour les enfants plus âgés. Les valeurs pour l'adulte sont inférieures à celles obtenues pour les enfants.

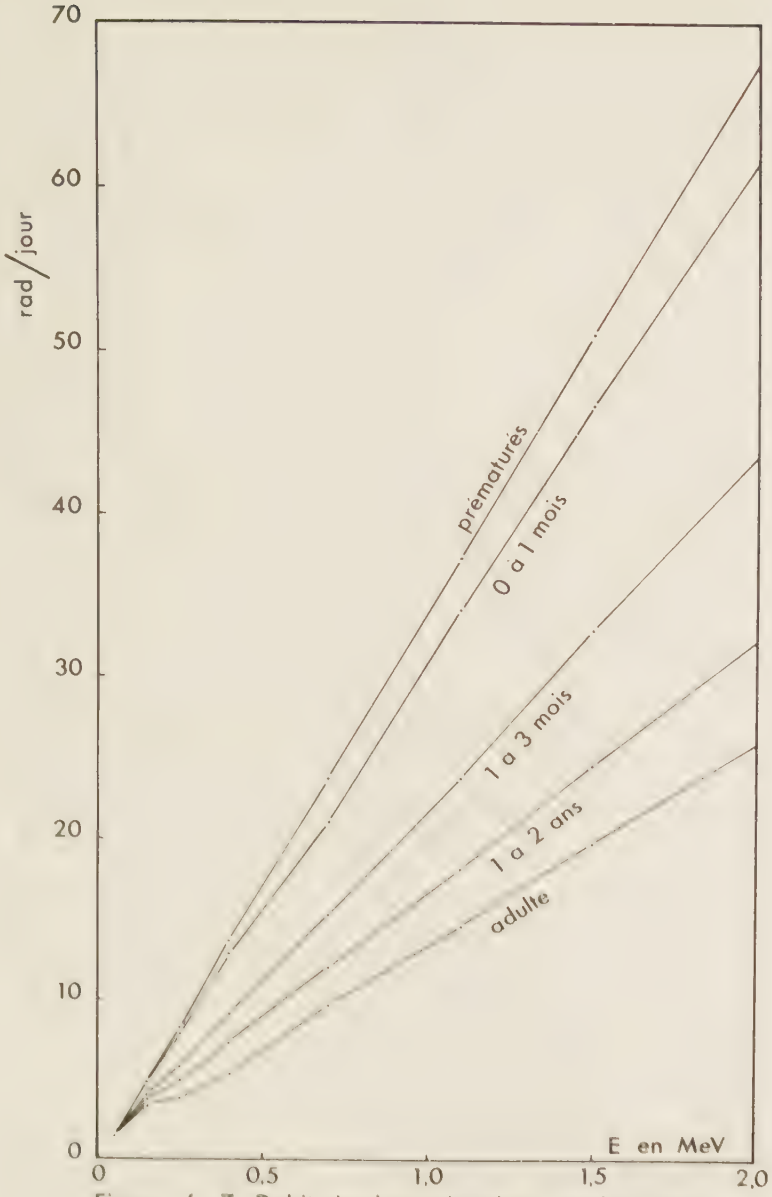


Figure. 6 - 7 : Débit de dose absorbée par les tissus endostéaux ($3,7.10^4$ électrons monocinétiques émis par gramme d'os, par seconde)

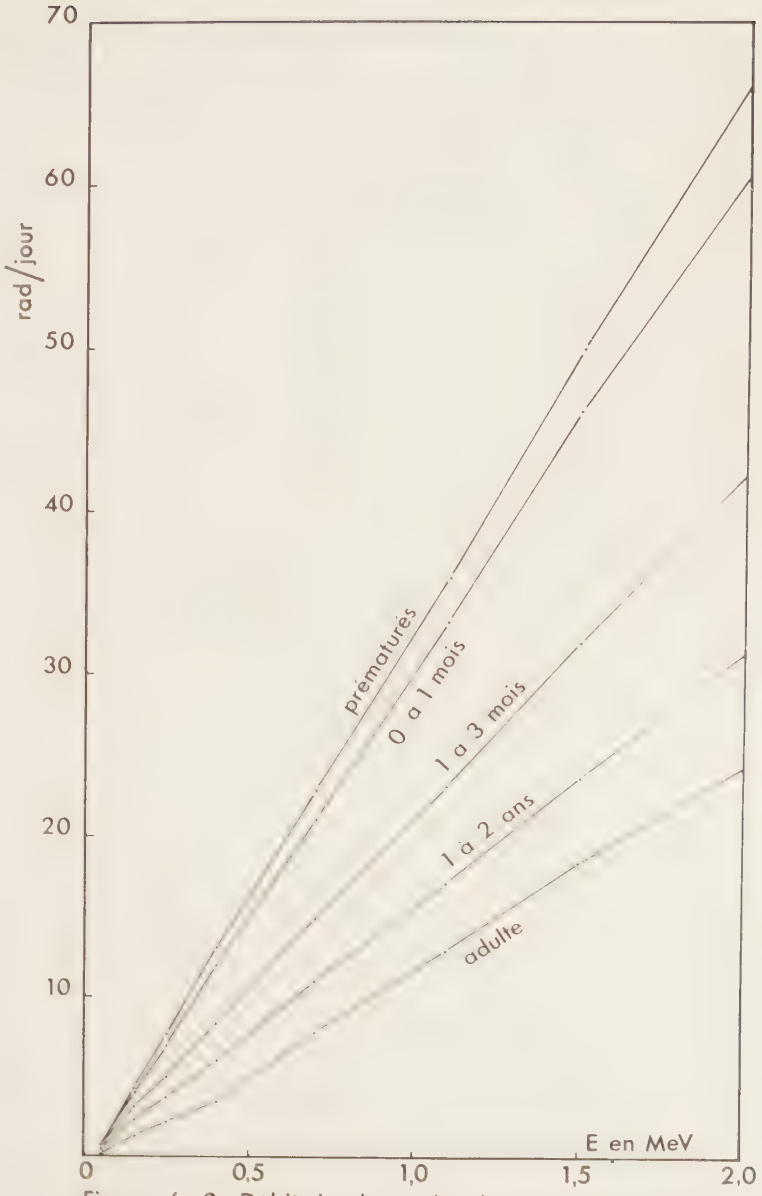


Figure. 6 - 8 : Débit de dose absorbée par la moelle osseuse ($3,7.10^4$ électrons monocinétiques émis par gramme d'os, par seconde)

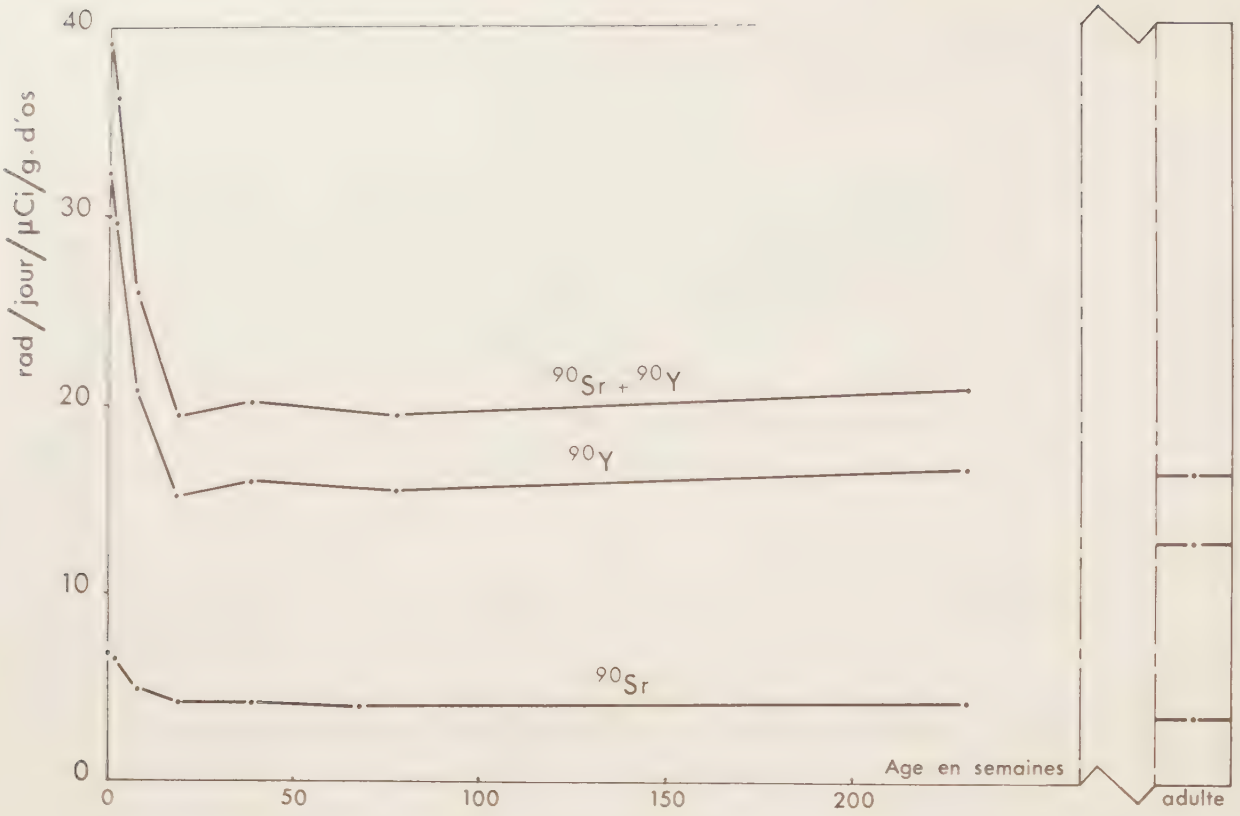


Figure. 6_9 : Débit de dose absorbée par les tissus endostéaux - Spectres d'électrons

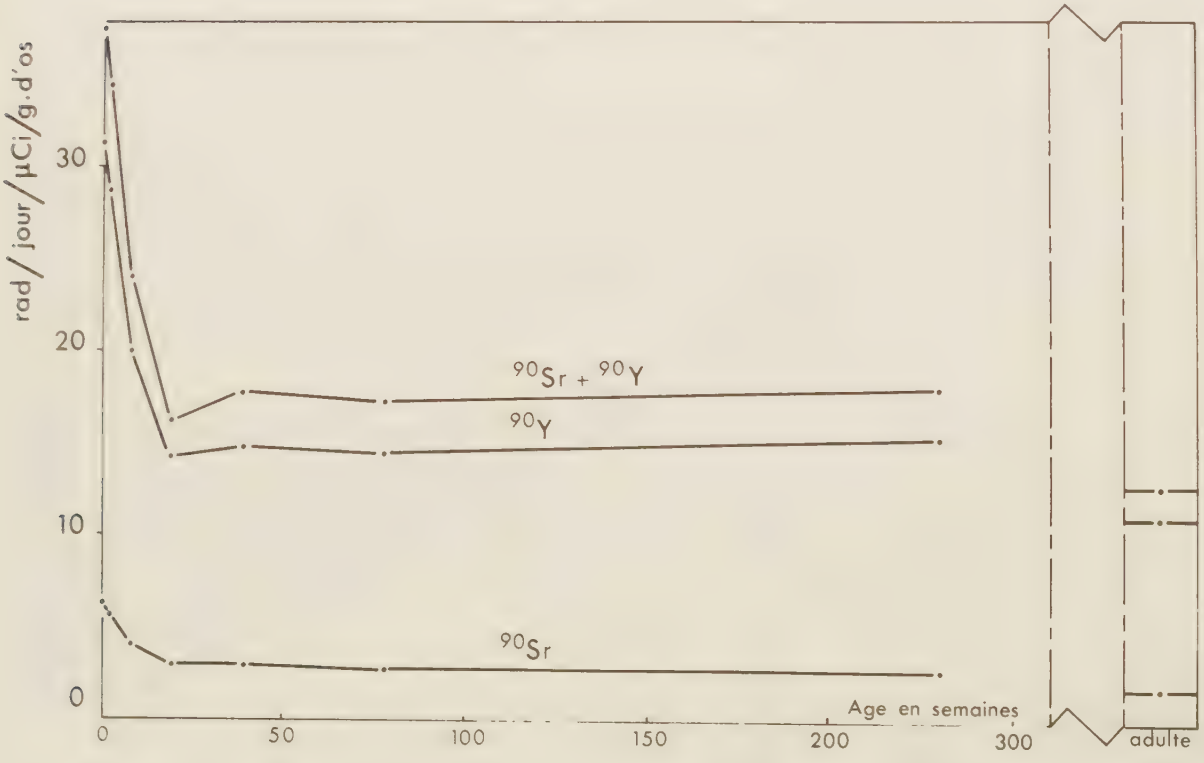


Figure. 6_10 : Débit de dose absorbée par la moelle osseuse - Spectres d'électrons

E (MeV)	Prématurés	0 à 1 mois	1 à 3 mois	3 à 6 mois	6 mois à 1 an	1 à 2 ans	Plus de 2 ans	Adulte
0,05	0,67	0,61	0,58	0,45	0,47	0,35	0,25	0,11
0,15	4,28	4,00	3,09	2,26	2,41	2,07	1,89	1,32
0,25	7,60	6,97	4,97	3,55	3,74	3,32	3,34	2,14
0,40	13,1	12,0	8,31	5,74	6,00	5,64	5,84	3,41
0,70	22,9	21,1	15,0	10,2	11,0	10,5	11,0	7,82
1,1	36,1	33,3	23,2	16,5	17,2	16,8	17,7	12,9
1,5	50,0	46,3	32,0	23,2	23,7	23,5	24,9	18,4
2,0	66,3	60,7	42,4	30,8	31,1	31,1	33,1	24,4

- Tableau 6-1 Débit de dose absorbée par la moelle osseuse en fonction de l'énergie des électrons et de l'âge de l'individu.

E	Prématurés	0 à 1 mois	1 à 3 mois	3 à 6 mois	6 mois à 1 an	1 à 2 ans	Plus de 2 ans	Adulte
0,05	1,59	1,57	1,57	1,51	1,51	1,46	1,43	1,38
0,15	4,89	4,84	4,10	3,73	3,83	3,51	3,60	3,53
0,25	8,31	7,89	5,85	4,97	4,99	4,52	4,77	3,88
0,40	13,7	12,9	9,15	7,33	7,40	6,89	7,33	5,44
0,70	23,8	21,1	15,4	11,5	12,1	11,7	12,6	9,74
1,1	37,3	44,2	23,9	17,3	18,2	17,7	19,1	14,6
1,5	51,0	46,8	33,0	23,4	24,6	24,3	25,9	19,8
2,0	67,5	61,6	43,7	30,3	32,4	32,1	34,4	26,0

- Tableau 6-2 Débit de dose absorbée par les tissus endostéaux en fonction de l'énergie des électrons et de l'âge de l'individu.

CLASSES D'ÂGE	Strontium-90		Yttrium-90		^{90}Sr + ^{90}Y	
	D	DI	D	DI	D	DI
Prématurés	6,20	6,93	31,2	32,2	37,4	39,1
0 à 1 mois	5,70	6,62	28,8	29,6	34,5	36,2
1 à 3 mois	4,11	5,04	20,1	20,9	24,2	25,9
3 à 6 mois	2,91	4,29	14,3	15,1	17,2	19,4
6 mois à 1 an	3,05	4,34	14,8	15,9	17,9	20,3
1 à 2 ans	2,76	4,01	14,5	15,5	17,2	19,5
plus de 2 ans	2,74	4,19	15,3	16,6	18,0	20,8
adulte	1,69	3,50	11,0	12,8	12,7	16,3

Tableau 6-3 Débit de dose absorbée par la moelle osseuse D et les tissus endostéaux DI, en fonction de l'âge de l'individu pour les spectres du strontium-90, de l'yttrium-90 et du mélange strontium et yttrium.

6 - 4 FACTEUR INDIVIDUEL

Si la définition d'individu moyen par classe d'âge a un sens pour étudier la variation des débits de dose absorbée au cours de l'âge, et ainsi définir un âge critique, il est néanmoins nécessaire de revenir à l'individu. En effet, le but de la radioprotection est de protéger l'homme, tant au niveau du groupe d'individus qu'au niveau de l'individu lui-même.

Aussi, est-ce l'étendue de la distribution des débits de dose absorbée qu'il est plus important d'étudier plutôt que l'écart-type. Elle permet en effet de situer les risques courus par les individus les plus éloignés de l'individu moyen, et ceci, d'autant plus que dans le cas qui nous occupe, il n'est pas possible de connaître les distributions de longueurs de corde de travées osseuses et d'espaces médullaires d'un individu vivant.

Comme il était trop onéreux d'estimer les débits de dose absorbée par la moelle osseuse et les tissus endostéaux pour l'ensemble des individus de l'échantillon, cela n'a été fait que pour la classe d'âge des enfants de plus de deux ans.

Les résultats sont donnés dans les tableaux 6-4 et 6-5 qui suivent.

E (MeV)	42 2,5 ans	43 2,5 ans	44 3,5 ans	45 5,5 ans	46 8 ans	"Individu moyen" 4,5 ans
0,05	0,28	0,14	0,21	0,31	0,18	0,25
0,15	2,50	1,44	2,47	2,19	1,92	1,89
0,25	4,24	1,95	4,10	3,38	3,11	3,34
0,40	7,52	3,69	7,11	5,91	5,67	5,84
0,70	13,73	7,24	13,10	11,27	11,20	11,04
1,10	22,00	11,98	21,78	18,97	18,37	17,73
1,50	30,56	17,28	30,85	26,60	26,07	24,90
2,0	40,33	22,98	40,74	35,40	34,65	33,09
^{90}Sr	3,52	1,75	3,36	2,86	2,63	2,74
^{90}Y	18,88	10,36	19,16	16,16	15,79	15,28
$^{90}Sr + ^{90}Y$	22,40	12,12	22,52	19,02	18,42	18,02

- Tableau 6-4 Débits de dose absorbée à la moelle osseuse de vertèbre d'enfants de plus de deux ans (rad (jour)$^{-1}$ par microcurie par gramme d'os).

E (MeV)	42 2,5 ans	43 2,5 ans	44 3,5 ans	45 5,5 ans	46 8 ans	"Individu moyen" 4,5 ans
0,05	1,38	1,38		1,40	1,42	1,43
0,15	3,84	3,32		3,82	3,81	3,60
0,25	5,32	3,57		4,79	4,77	4,77
0,40	8,61	5,51		7,37	7,40	7,33
0,70	14,42	8,75		12,27	12,80	12,57
1,1	22,57	13,38		19,59	20,21	19,13
1,5	31,24	18,21		27,31	27,77	25,86
2,0	41,17	23,93		36,06	36,66	34,37
^{90}Sr	4,67	3,39		4,25	4,26	4,19
^{90}Y	19,66	11,74		17,10	17,51	16,64
$^{90}Sr+^{90}Y$	24,33	15,13		21,35	21,77	20,83

- Tableau 6-5 Débits de dose absorbée par les tissus endostéaux de vertèbre d'enfants de plus de deux ans (rad $(jour)^{-1}$ par microcurie par gramme d'os).

On constate l'écart important, tant pour la moelle osseuse que pour les tissus endostéaux, entre les individus 42 et 43 de même âge. Le premier est proche de l'individu moyen de la classe d'âge de 1 à 3 mois et le second de l'adulte.

La demi-étendue (Tableau 6-6) dans la classe d'âge est environ de 30 % du débit de dose absorbée à la moelle osseuse de l'individu moyen, quelle que soit l'énergie cinétique des électrons. Pour les débits de dose absorbée aux tissus endostéaux, elle croît avec l'énergie des électrons pour atteindre 25 % à 2 MeV.

- Tableau 6-6 Demi étendue en pourcentage des débits de dose absorbée de l'individu moyen de la classe de plus de deux ans.

Energie (MeV)	Moelle osseuse (%)	Tissus endostéaux (%)
0,05	34	1
0,15	28	7
0,25	34	18
0,40	36	21
0,70	29	22
1,1	28	24
1,5	27	25
2,0	27	25
Sr	38	15
Y	29	24
Sr + Y	29	22

6 - 5 COMPARAISON AVEC LES RESULTATS OBTENUS PAR WHITWELL et SPIERS

WHITWELL a effectué des calculs semblables pour la vertèbre d'un adulte en utilisant une méthode de Monte-Carlo, simulant le parcours des électrons dans l'os (34, 35).

Le processus utilisé est le suivant :

- une longueur de corde d'espace L est choisie ;

- en tirant au hasard dans les histogrammes des fréquences de longueur de corde d'espaces médullaires et de travées osseuses, on simule une trajectoire d'électrons d'énergie E et de parcours R ;

- les débits de dose absorbée le long de la corde d'espace médullaire L sont évalués pour cette trajectoire ;

- pour la même longueur de corde d'espace médullaire L, on tire au hasard un grand nombre de trajectoires ;

- on obtient ainsi les débits de dose absorbée le long de cette corde d'espace médullaire pour des électrons d'énergie E.

Les débits de dose absorbée le long de cette corde sont évalués pour des électrons de différentes énergie et pour différents spectres d'énergie. On recommence les mêmes opérations pour différentes longueurs L de corde d'espaces médullaires. La distribution des longueurs de corde d'espaces médullaires permet d'estimer, alors, les débits de dose absorbée par la moelle osseuse.

Pour estimer les débits de dose absorbée par les tissus endostéaux, on utilise un processus analogue. On détermine une distance moyenne $\bar{d}$ de trajet rectiligne dans une plaque de tissu de 10 μm d'épaisseur, en fonction des longueurs L de corde d'espaces médullaires.

Les débits de dose par les tissus endostéaux sont d'abord estimés pour différentes valeurs de $\bar{d}(L)$, puis pondérés à l'aide de la distribution de longueurs L de corde d'espaces médullaires.

Le milieu de l'os spongieux est transformé en milieu équivalent-tissu mou. Dans les calculs, on suppose que les parcours des électrons d'énergie E vérifient la relation

$$R = A\,E^{m}$$

où A et m sont des constantes.

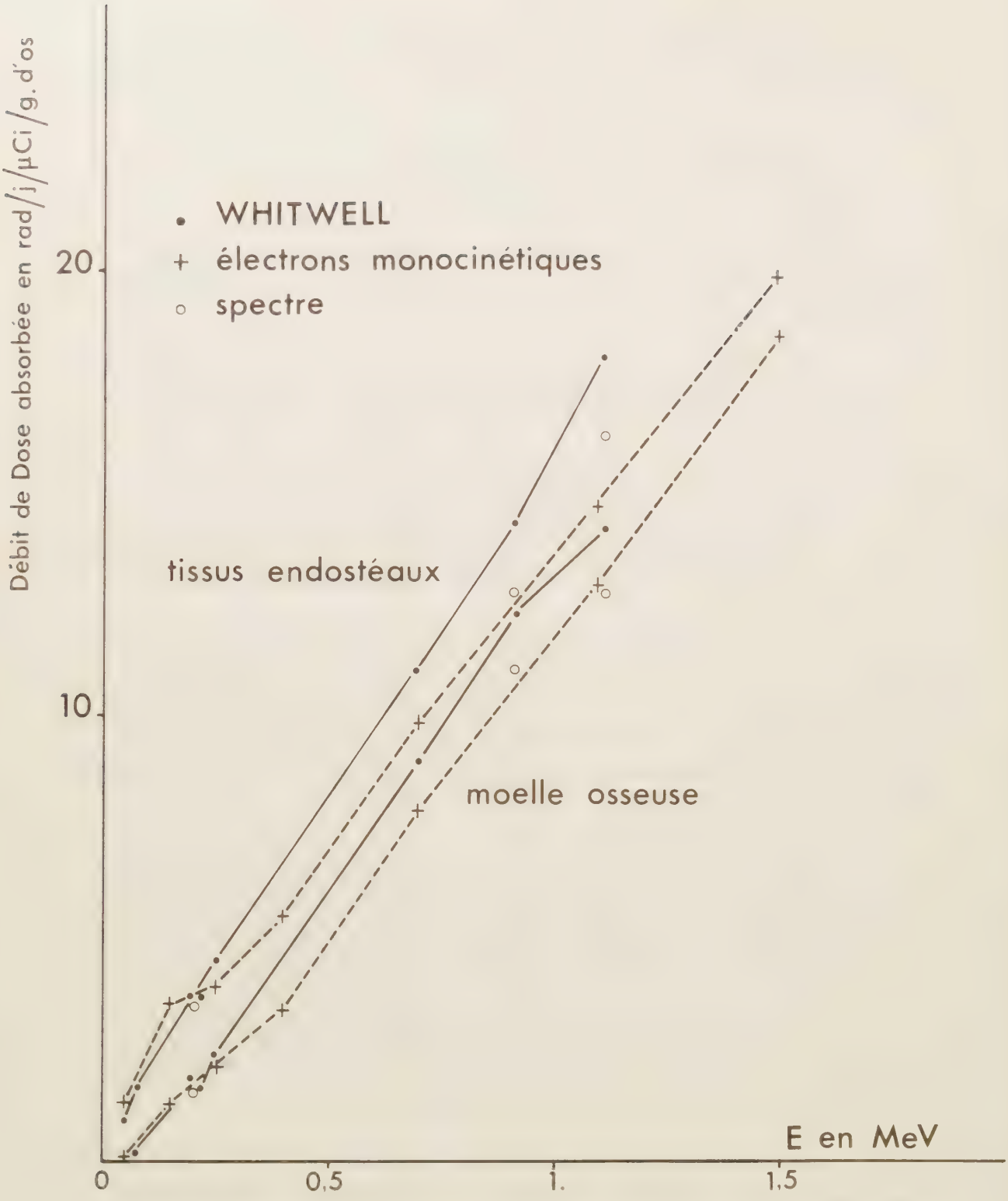


Figure. 6_11 : Comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par WHITWELL

Les résultats de WHITWELL (35) pour des radioéléments émetteur beta moins (Tableau 6-7) et nos résultats, pour des électrons monocinétiques et pour le strontium-90, l'yttrium-90 et le mélange des deux spectres à l'équilibre sont présentés dans la figure 6-11. Tant pour les débits de dose absorbée par la moelle osseuse que pour les débits de dose absorbée par les tissus endostéaux, nos résultats sont proches de ceux de WHITWELL , bien qu'inférieurs au-dessus de 0,4 MeV.

Cette différence qui reste inférieure à 10 % des valeurs estimées peut être due :

- soit au facteur individuel (6-7) ;
- soit à la méthode d'évaluation et aux données physiques utilisées.

- Tableau 6-7 Energie moyenne des spectres d'énergie beta (35)

Radioélément	Energie moyenne du spectre beta (MeV)
carbone-14	0,049
calcium-45	0,076
strontium-90	0,200
fluor-18	0,218
phosphore-32	0,695
yttrium-90	0,927
$^{90}Sr + ^{90}Y$	1,127 *

* $\bar{E}$ (strontium 90) + $\bar{E}$ (yttrium-90)

BIBLIOGRAPHIE

(1) ANDERSON T.W. - An introduction to multivariate analysis, Londres, J. Wiley Ed., 1958.

(2) BAZIN J.P., MARCHADIER B., LAFUMA J. - Traitement mathématique de données métaboliques liées à la théorie des compartiments.- Premier congrès européen de radioprotection, Menton 9-11 octobre 1968.- Paris, Société Française de Radioprotection, 1971, pp. 374-380.

(3) BENZECRI J.P., Représentation euclidienne d'un ensemble fini muni de masses et de distances. Cours, Paris, Laboratoire de Statistiques Mathématiques, Fac. des Sci., 1967 (multigraphié)

(4) BERGER M.J. and SELTZER S.M. - Tables of Energy losses and ranges of electrons and positrons.- Rapport américain NASA, SP 3012, 1964.

(5) BRADEN C.H., SLACK L. and SHULL F.B. - The forbidden beta decay of ^{90}Sr and ^{90}Y. Phys. Rev., 1949, 75, pp.1964-1965.

(6) CAZES P. - Application de l'analyse des données au traitement de problèmes géologiques, Thèse 3ème cycle.- Paris, Fac. des Sci., Institut de Statistiques, 1970.

(7) RECOMMANDATIONS de la COMMISSION INTERNATIONALE de PROTECTION RADIOLOGIQUE.- Rapport du Comité II sur la dose admissible en cas d'irradiation interne (1959). Publications CIPR 2, Paris, Gauthier-Villars, 1963.

(8) DARLEY P.J., Mensuration of trabecular bone for dosimetry purposes.- 2nd IRPA Congress, Brighton, 3-8 May, 1970.

(9) DEMPSTER A.P. - Elements of continuous multivariate analysis. Reading, Addison-Wesley, 1969.

(10) DOUSSET M. - Introduction à l'étude des problèmes de protection contre les rayonnements (Hygiène Atomique). SACLAY, INSTN.

(11) ENGSTROM A., BJORNERSTED R., CLEMEDSON C. et NELSON A.- Bone and radiostrontium.- Stockholm, Almquist and Wicksell, 1957, pp.90-97.

(12) EVANS R.D. - The Atomic Nucleus, New-York, Mc.Graw-Hill Book Company, 1955.

(13) GIRAUD M. - Processus aléatoires. Dunod, Paris, 1965.

(14) GREVERIE F.-Communication personnelle.

(15) HASHIMOTO M.,YUMOTO T., HAMADA T., YOSHINAGA H. et ANTOKU S.- On the thickness of each trabeculae and intertrabecular spaces in the human sternum, vertebrae, illium and ribs.- Kyushu J. Med. Sci., 1962, 13, pp. 267-272.

(16) HASHIMOTO M. YUMOTO T. et AMADA T.- On the dimensional ratio of the cartex, trabeculae and marrow in the sagital section of the sternum and in the transverse section of the vertebrae.- Kyushu J. Med. Sci., 1962, 13, pp. 251-266.

(17) I.C.R.U. - Radiation quantities and units.- Report 11, Washington, ICRU, 1968.

(18) I.C.R.U. - Linear Energy transfer.- Report 16, Washington, ICRU, 1970.

(19) I.C.R.U. - Radiation quantities and units.- Report 19, Washington, ICRU, 1971.

(20) JENSEN E.N. and JACKSON LASLETT L.- Shape of the beta-spectra of ^{90}Sr and ^{90}Y, Phys. Rev., 1949, 75, pp. 1949-1950.

(21) KATZ L. and PENFOLD A.S. - Range energy relations for electrons and the determination of beta-ray end point energies by absorption.- Rev. Modern Phys., 1952, 24, pp. 28-44.

(22) LEA D.E. - Actions of radiations on living cells.- Cambridge, University Press, 1956.

(23) LE GRAND J. et WITMER G.- Evolution dans les vertèbres des tailles des travées osseuses et des espaces médullaires au cours de l'enfance.- 5ème congrès de la Société Française de Radioprotection.- Grenoble, 1-5 février 1971, Paris, SFRP, 1971, pp. 360-380.

(24) NUCLEAR DATA SHEETS ^{90}Sr, ^{90}Y, ^{90}Zr.- NRC 60-4-33 à 60-4-36.

(25) ODIEVRE M. et MECHALI D.- Evaluation de l'irradiation de la moelle osseuse en fonction de l'âge après contamination par le strontium-90. Rapport CEA-R-3952, 1970.

(26) PATAU J.P., BLANC D., MATHIEU J. et MASON G. - Transport simulé d'électrons de 2 MeV dans divers matériaux. In : Proceedings of the Symposium on Microdosimetry, ISPRA, octobre 20-24, 1969.-

(27) SHEPPARD C.W. - Basic principles of tracer method. J. Wiley, New-York, 1962.

(28) SPENCER L.V. - Energy dissipation by fast electrons. NBS Monograph 1, 1959.

(29) SPENCER L.V.-Theory of electron penetration.- Phys. Rev., 1955, 98, 6, pp. 1597-1615.

(30) SPIERS F.W. - Effective atomic number and energy absorption in tissues. Brit. Journ. Rad., 1946, 19, 218, pp.52-63.

(31) SPIERS F.W. - Dosimetry at interfaces with special reference to bone. In : Proceedings of the Symposium on Microdosimetry, ISPRA, Novembre 13-15, 1967, Ebert H.G. Ed., Bruxelles, European Communities, 1968, pp.473-502.

(32) SPIERS F.W.- New methods of radiation dosimetry in bone.- 2nd IRPA Congress, Brighton 3-8 May, 1970.

(33) WAKAMATSU E. et SISSONS M.A. - The cancellousbone of the iliac crest.- Calc.Tiss. Res. 1969, 4, pp. 147-161.

(34) WHITWELL J.R.- Monte-Carlo calculation of beta particule dose in trabecular bone.- 2nd IRPA Congress, Brighton, 3-8 May 1970.

(35) WHITWELL J.R. and SPIERS F.W. - The dosimetry of beta-emitters in bone : Theoretical Methods. 5ème congrès de la SFRP, Grenoble 1-5 février 1971.- Paris, Société Française de Radioprotection, 1971, pp. 401-417.

(36) WITMER G.- Evolution avec l'âge des tailles des espaces et des travées dans l'os spongieux de l'enfant, étudiée par mesure automatique.- Thèse, Fac. de Médecine de Genève, 1969, et Radioprotection, 1969, 4, 1, pp. 43-64.

Manuscrit reçu le 14 septembre 1972

Vu et Approuvé
PARIS, le 4 septembre 1972
Le Président
de l'Université de PARIS VI